Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta informatiky a statistiky

Katedra informačního a znalostního inženýrství

Student : **Marek Nekvasil**

Vedoucí bakalářské práce : **RNDr. Jiřina Vejnarová, CSc.**

TÉMA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Porovnání tautologií výrokové fuzzy logiky s dvouhodnotovou

ROK : 2004

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal(a).

V Praze dne 21.5.2004 ....

podpis

Abstrakt (česky)

Cílem této práce je porovnání vždy pravdivých výroků klasické dvouhodnotové výrokové logiky, tak zvaných tautologií, s výroky, které jsou vždy pravdivé ve fuzzy logice. V této práci se zaměřujeme hlavně na zjišťování zda tautologie klasické výrokové logiky jsou také 1-tautologiemi v některé z nejznámějších výrokových fuzzy logik nebo dokonce v základní logice a platí tudíž ve všech logikách.

První část práce je věnována klasické dvouhodnotové logice. V této části definujeme pojmy jako výrok, složený výrok, výroková formule a také se zde zabýváme některými vlastnostmi základních výrokových spojek. Několik odstavců je také určeno k osvětlení odvozování a odvozovacích pravidel v klasické logice. Na závěr první části si uvedeme několik nejvýznamnějších tautologií dvouhodnotové výrokové logiky.

V druhé části se budeme zabývat výrokovou fuzzy logikou, nejprve si povíme, proč vlastně fuzzy logika vznikla a co je její podstatou, a pak se budeme věnovat způsobu, jakým jsou ve fuzzy logice odvozeny výrokové spojky. Dále rozebereme některé vlastnosti základní logiky a zjistíme, jaké v ní platí zákony. Konkrétní vlastnosti logiky ale závisí na volbě pravdivostní funkce základní výrokové spojky (konjunkce), tak zvané *t*-normy. Jednotlivé fuzzy logiky se právě v závislosti na volbě *t*-normy liší. My si popíšeme tři nejznámější logiky (Łukasiewiczovu, Gödelovu a součinovou) a ozřejmíme nejdůležitější rozdíly mezi nimi.

Třetí a poslední část je věnována chování tautologií, které jsme uvedli v části o dvouhodnotové výrokové logice, ve fuzzy logice. Jednu po druhé zde prozkoumáme a ověříme, které platí v základní logice, a u kterých záleží na volbě *t*-normy.

Abstract (English)

The purpose of this paper is the comparison of propositions that are always true, so called tautologies, in two-valued logic with always true propositions in fuzzy logic. For the most part, in this paper we are focusing on the investigation of whether the tautologies of classical two-valued logic are also 1-tautologies of one of the most known propositional fuzzy logics or even 1-tautologies of Basic Logic, and therefore are always true in any logic.

First part is dedicated to the classical two-valued propositional calculus. In this part we will define terms like proposition, compound proposition and propositional formula and we will also concern some properties of basic propositional connectives. A few paragraphs are also dedicated to the declaration of deduction and deduction rules in classical logic. In the closing of the first part we will name some of the most important tautologies of the classical two-valued propositional calculus.

In the second part we will consider propositional fuzzy logic; at first we will introduce the origin and the very main purpose of the fuzzy logic and then we will focus on the manner of derivation of the propositional connectives. Then we will discuss some properties of Basic Logic and will learn which laws are valid here. The particular characteristics of propositional calculi depend on the choice of truth function of the basic propositional connective (conjunction), which we refer as a *t*-norm. Individual fuzzy logics just differ with various choice of *t*-norm. Here we will describe the three most known calculi (Łukasiewicz, Gödel and produkt) and then manifest their most important differences.

The third part is devoted to the behaviour of tautologies we introduced in the first part concerning two-valued propositional logic in propositional fuzzy logic. We will examine one by one and verify which are valid in Basic Logic and which are dependent on the choice of *t*-norm.

Obsah

Úvod

Vznik logiky se datuje již do starého Řecka. Za zakladatele logiky je všeobecně považován Aristoteles a to dokonce logiky formální v tom smyslu, jak ji chápeme dnes. Během staletí prošla tato vědecká disciplina bohatým vývojem, až se v devatenáctém století opět navrátila k matematickému zázemí. Tento návrat je spojen se jmény George Boolea, Johna Venna a dalších, kteří dali podnět ke vzniku toho, co dnes nazýváme klasickou výrokovou logikou. Na počest prvního z nich ji také někdy nazýváme booleovskou logikou.

Klasická výroková logika se, jak jinak, zabývá pravdivostí výroků. předmětem jejího zkoumání je to, jak souvisí pravdivost jedněch výroků s jinými, jestli nejsou některé výroky důsledky jiných výroků a dokonce to, jak souvisí celé množiny výroků s jinými. Klasická logika chápe pravdivost výroku jako proměnnou, která ovšem přirozeně může nabývat pouze dvou hodnot, pravda a nepravda. Podle toho se také klasická logika označuje jako dvouhodnotová.

Během vývoje logiky ale omezení pouze na pravdu a nepravdu připadalo některým logikům poněkud „černobílé“, zkrátka že příliš nepopisovalo realitu. A tak vzniklo mnoho různých variant klasické logiky, neklasických logik, které připouští i další možnosti pravdivosti výroku. Některé se zabývají nemožností rozhodnout o pravdivosti výroku, jiné naopak zkoumají pravdivost výroku z časového, morálního nebo třeba pravděpodobnostního hlediska. V životě se ale často setkáváme s výroky, o kterých si umíme představit, že jsou či nejsou pravdivé, ale jednoduše jsou některé více pravdivé než ostatní. A právě různými stupni pravdivosti výroků se zabývá fuzzy logika.

Fuzzy logika se objevila poprvé v roce 1965 v článku, jehož autorem byl profesor Lotfi A. Zadeh. Slovo fuzzy znamená neostrý, matný, mlhavý, neurčitý, vágní. Odpovídá tomu i to, čím se fuzzy teorie zabývá: snaží se pokrýt realitu v její nepřesnosti a neurčitosti.

Fuzzy logika je v současné době snad nejpopulárnější neklasickou logikou. Je tak díky tomu, že v praxi je velmi často zapotřebí rozhodovat na základě vágních údajů, a tak se výsledky fuzzy logiky používají v řadě oblastí, od regulace až po umělou inteligenci. Fuzzy regulátory automatických praček jsou dnes téměř samozřejmostí. Fuzzy regulace se používá v čím dál širších oblastech, od fuzzy fokusu některých kvalitnějších fotoaparátů, přes elektronické automatické převodovky až po zpětnovazební kontrolu v jaderných elektrárnách. K posledním úspěchům umělé inteligence patří vyřešení úlohy udržení stability převráceného kyvadla. K tomu, k čemu je jinak zapotřebí řešení soustavy diferenciálních rovnic, v reálném čase neřešitelné, stačí osm jednoduchých fuzzy podmínek. Fuzzy logika se ale uplatňuje i v náročnějších oblastech, jako rozeznávání řeči, či předvídání chování finančních trhů.

My se ovšem budeme zabývat matematickými základy fuzzy logiky jako nástroje přibližného usuzování. V tomto směru je fuzzy logika rozšířením klasické dvouhodnotové logiky.

V klasické logice existuje řada (dokonce nekonečně mnoho) výroků, které jsou vždy pravdivé, tzv. tautologií. Některé z nich jsou natolik významné, že se považují za zákony dvouhodnotové logiky, tyto zákony používáme hlavně při usuzování a při úpravách výrokových formulí. Řada těchto zákonů je naší mysli blízká, používáme je i v běžném životě při každodenním usuzování, některé další jsou trochu komplikovanější, což ale neznamená, že by byli méně užitečné při usuzování a dokazování.

Některé tautologie, které nám připadají přirozené ve dvouhodnotové logice, ve fuzzy logice platit nemusí, jiné, které působí, že ani ve fuzzy logice platit neměly, naopak platit mohou. Cílem této práce je porovnat právě tyto důležité tautologie dvouhodnotové výrokové logiky s tautologiemi fuzzy logiky a zjistit, které tautologiemi jsou a které nikoliv.

Nejprve se budeme zabývat dvouhodnotovou logikou, a ukážeme, které významné tautologie zde platí. Potom se budeme zabývat vlastnostmi jednotlivých fuzzy logik, zjistíme, které výroky jsou platné v tzv. základní logice (tj. společném základu všech výrokových logik) a na závěr prozkoumáme chování tautologií dvouhodnotové logiky ve fuzzy logice a zjistíme, které z nich platí obecně v základní logice, u kterých záleží na konkrétním výběru logiky a které třeba neplatí vůbec.

1 Dvouhodnotová výroková logika

1.1 Výroky

Výroky tvoří samou podstatu výrokové logiky, jak už ostatně napovídá její název, zabýváme se v ní totiž usuzováním založeném výhradně na pravdivosti výroků. Abychom zabránili nedorozumění, musíme jednoznačně určit co výrok je a co není.

Definice 1.1.1 Výrok *je věta jazyka, které má smysl přiřadit pravdivostní hodnotu.*

Povšimněme si, že u výroku musí mít přiřazení pravdivostní hodnoty smysl. Tato definice nic neříká o tom, že musí být možné tuto pravdivostní hodnotu určit. Představte si například, že vám někdo v dopise pošle větu: „je tu krásně." Vy se nemůžete přesvědčit o tom, zda to je či není pravda, důležité ale je, že by mělo jistý smysl, kdyby to pravda byla (popřípadě nebyla). Tato věta tedy je výrokem.

V klasické výrokové logice říkáme, že výrok je *pravdivý* nebo že je *nepravdivý*, tedy že jeho pravdivostní hodnota je *pravda* popřípadě *nepravda* a označujeme ji symboly 1 respektive 0.

1.2 Složené výroky

V přirozeném jazyce můžeme výroky spojovat pomocí gramatických spojek jako jsou *a*, *nebo*, *jestliže ... pak*. Jestliže spojíme dva výroky pomocí takovýchto spojek pak výsledná věta je opět výrok.

Výroková logika studuje to, jak pravdivost či nepravdivost některých výroků souvisí s pravdivostí či nepravdivostí jiných výroků. Obdobně jako v přirozeném jazyce spojujeme výroky pomocí gramatických spojek, můžeme v logice spojovat výroky pomocí logických spojek. Protože tyto spojky spojují výroky, říkáme jim také výrokové spojky.

Nejjednodušší používanou spojkou je jednomístná spojka *negace*, označujeme ji symbolem $\neg$. Tato spojka není spojkou v pravém slova smyslu, neboť se vztahuje pouze k jednomu výroku. Označíme-li nějaký výrok písmenem φ, pak platí, že pravdivostní hodnota složeného výroku $\neg\varphi$ je opačná k pravdivostní hodnotě výroku φ, čili označuje jeho nepravdivost. Ke zobrazení pravdivostních hodnot obvykle používáme tabulku.

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Tabulka 1.2.1

V tabulce zkoumáme průběh pravdivostních hodnot složeného výroku v závislosti na pravdivosti výroků, ze kterých je složen. Protože neznáme skutečné pravdivostní hodnoty těchto výroků, předpokládáme všechny jejich možné kombinace a místo o výrocích hovoříme o *výrokových proměnných* zastupujících konkrétní výroky. Výrokové proměnné obvykle označujeme malými písmeny řecké abecedy φ, ψ, χ.

Nejčastěji používané dvoumístné spojky (tzn. spojující dva výroky) jsou *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *ekvivalence*, které odpovídají spojkám běžného jazyka *...a...*, *...nebo...*, *jestliže... pak...*, *...právě tehdy když...* . Tyto spojky označujeme symboly $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Pokud označíme dva výroky písmeny φ a ψ, potom pravdivost složeného výroku $\varphi\wedge\psi$ označuje současnou pravdivost výroků φ a ψ, pravdivost výroku $\varphi \vee \psi$ pravdivost alespoň jednoho z obou výroků a pravdivost výroku $\varphi \Leftrightarrow \psi$ znamená rovnost pravdivostních hodnot výroků φ a ψ. Výrok $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivý, když první výrok (φ) je pravdivý a druhý výrok (ψ) je nepravdivý, jinak je tento výrok vždy pravdivý.

Přehledně průběh pravdivostních hodnot zachycuje tabulka 1.2.2.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tabulka 1.2.2

Toto samozřejmě nejsou všechny jedno- a dvoumístné logické spojky. V praxi se občas setkáme ještě s některými dalšími spojkami, pro tuto práci však nejsou důležité. Počet všech možných *n*-místných logických spojek je 2^{2^n}, počet možných dvoumístných spojek je tedy 16.

Použitím různých kombinací výše uvedených výrokových spojek lze sestavit výroky s různým průběhem pravdivostní hodnoty, pokud uvažujeme dvě výrokové proměnné, lze takto sestavit dokonce všech 16 možných průběhů pravdivostních hodnot. O takové množině výrokových spojek říkáme, že je *funkčně úplná*.

Definice 1.2.1 *Množina výrokových spojek je* funkčně úplná, *pokud s ní lze definovat všech 16 dvoumístných spojek.*

1.3 Formule

Jelikož složené výroky jsou také výroky, lze je dále skládat pomocí výrokových spojek. Protože ale v logice nezkoumáme konkrétní výroky, tak také v zápisech používáme *výrokové proměnné* a místo o složených výrocích a výrocích, ze kterých jsou tyto složeny, se bavíme o *výrokových formulích* a *podformulích*.

Definice 1.3.1 *Každá výroková proměnná je* formule. *Když φ, ψ jsou výrokové formule, pak i $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule. Žádné jiné výrazy nejsou výrokové formule.*

Při skládání složitějších formulí používáme pro přehlednost závorky, obdobně jako v matematice. Průběh pravdivostní hodnoty jakékoliv formule lze jednoduše zjistit z tabulky, nejprve určíme pravdivostní hodnoty podformulí, teprve potom pravdivostní hodnotu vlastní formule. Ukažme si to na příkladě $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Tabulka 1.3.1

Pokud si pozorně prohlédneme průběh pravdivostních hodnot naší formule a porovnáme jej s tabulkou základních logických spojek, zjistíme, že je stejný jako průběh pravdivostních hodnot *ekvivalence*. Pokud na něco takového narazíme, říkáme, že formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou *logicky ekvivalentní*.

Definice 1.3.2 *Dvě formule jsou* logicky ekvivalentní, *pokud průběh jejich pravdivostních hodnot v závislosti na stejných výrokových proměnných je shodný.*

1.4 Tautologie a kontradikce

Nyní prozkoumejme průběh pravdivostních hodnot této formule: $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Tabulka 1.4.1

Zjistili jsme, že tato formule je vždy pravdivá, nezávisle na hodnotách výrokových proměnných. Formule, které jsou vždy pravdivé, mají v logice zvláštní postavení, takovým formulím říkáme *tautologie*.

Definice 1.4.1 Tautologie *je formule, která je vždy pravdivá, pro každou kombinaci pravdivostních hodnot výrokových proměnných..*

Obdobné postavení mají formule, které jsou vždy nepravdivé. Těmto formulím říkáme *kontradikce.*

Definice 1.4.2 Kontradikce *je formule, která je vždy nepravdivá, pro každou kombinaci pravdivostních hodnot výrokových proměnných.*

O kontradikcích někdy říkáme, že jsou *nesplnitelné*, to proto, že nejsou pravdivé pro žádnou kombinaci výrokových proměnných. Všechny ostatní formule jsou *splnitelné.*

Každého jistě napadne, že negací tautologie dostaneme kontradikci a naopak. Jejich postavení je tedy totožné.

1.5 Odvozování

Ve výrokové logice se zabýváme usuzováním založeným na pravdivosti výroků. Nejdůležitější vlastností výrokové logiky je možnost usuzovat z pravdivosti jedněch formulí na pravdivost jiných formulí.

K tomu existují ve výrokové logice jistá odvozovací (nebo také dedukční) pravidla. Odvozené formule se nazývají *důsledky* výchozích formulí. Než se ale budeme moci zabývat odvozovacími pravidly, musíme definovat pojem *logické vyplývání*.

Definice 1.5.1 *Jestliže formule $\varphi \Rightarrow \psi$ je tautologie, říkáme, že ψ* logicky vyplývá *z φ.*

Ke zjištění, co logicky vyplývá z výchozí formule, používáme v klasické výrokové logice tato tři odvozovací pravidla.

1.5.2 Modus ponens, neboli pravidlo **odloučení**

Když φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ jsou pravdivé, potom i ψ je pravdivé.

1.5.3 Pravidlo substituce

Tautologie zůstane tautologií, i když v ní nahradíme každý výskyt určité proměnné jednou a toutéž správně utvořenou formulí.

1.5.7 Pravidlo nahrazení ekvivalentních podformulí

Jestliže nahradíme libovolnou podformulí tautologie formulí s ní ekvivalentní, výsledkem bude opět tautologie.

Vyjdeme-li z logicky pravdivých formulí, pak aplikováním těchto pravidel získáme opět pouze pravdivé formule. Díky tomu můžeme definovat pojem *důsledek*.

Definice 1.5.8 *Formule φ je* bezprostředním důsledkem *množiny formulí Γ, jestliže vznikne aplikací některého z odvozovacích pravidel na formule Γ.*

Definice 1.5.9 *Formule φ je* logickým důsledkem *množiny formulí Γ (Γ |- φ), jestliže $\varphi \in \Gamma$, nebo je bezprostředním důsledkem Γ, nebo bezprostředním důsledkem množiny obohacené o některé její bezprostřední důsledky.*

1.6 Některé významné tautologie

Protože tautologie jsou vždy pravdivé, je řada z nich považována za „zákony“ logiky. Tyto se často používají při usuzování a dokazování a zjednodušování složitějších formulí. Uveďme si zde alespoň některé z nejvýznamnějších tautologií dvouhodnotové logiky.

1.6.1 Zákon totožnosti

$\varphi \Rightarrow \varphi$

Zákon totožnosti říká, že pokud je výrok pravdivý, pak je pravdivý.

1.6.2 Zákon dvojité negace

$\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$

Podle zákona dvojité negace negováním negace výroku dostaneme původní výrok.

1.6.3 Zákon vyloučeného třetího

$\varphi \vee \neg\varphi$

Zákon vyloučeného třetího říká, že výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý. Potvrzuje tedy samotnou „dvouhodnotovost“ logiky.

1.6.4 Zákon sporu

$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Podle tohoto zákona nemůže být výrok najednou pravdivý i nepravdivý.

1.6.5 Komutativní zákony

$(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ (komutativnost konjunkce)

$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$ (komutativnost disjunkce)

1.6.6 Asociativní zákony

$(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ (asociativita konjunkce)

$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$ (asociativita disjunkce)

1.6.7 Distributivní zákony

$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (distributivnost konjunkce)

$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ (distributivnost disjunkce)

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$ (distributivnost implikace)

Komutativní, asociativní a distributivní zákony popisují některé užitečné vlastnosti logických spojek. Tyto zákony často aplikujeme při úpravách a zjednodušování složitějších formulí.

1.6.8 De Morganovy zákony

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

De Morganovy zákony ukazují, jak lze nahradit disjunkci konjunkcí a naopak, čehož se opět využívá při úpravách a zjednodušování složitějších formulí. Z toho mj. vidíme, že pokud vypustíme jednu z těchto spojek, zůstává množina logických spojek funkčně úplná.

1.6.9 Zákon ekvivalence

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$

Ekvivalenci lze chápat jako oboustrannou implikaci. Po vypuštění spojky ekvivalence tedy množina výrokových spojek také zůstává funkčně úplná.

1.6.10 Vyjádření implikace

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Implikace je nepravdivá, pokud druhý výrok neplatí a první ano. Implikaci lze tedy takto vyjádřit pomocí disjunkce. Z tohoto a předchozích zákonů plyne, že množiny výrokových spojek $\{\neg,\wedge\}$, $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\Rightarrow\}$ jsou funkčně úplné.

1.6.11 Idempotenční zákony

$(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

Konjunkce a disjunkce shodných výroků nemá zvláštní logický význam. Opět je toto užitečné při zjednodušování složitějších formulí.

1.6.12 Absorpční zákony

$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow \varphi$

1.6.13 Zákon kontrapozice

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

Zákon kontrapozice ukazuje logicky správné obrácení implikace. Pokud neplatí závěr, ke kterému jsme došli, pak neplatí ani premisy, ze kterých vycházíme.

1.6.14 Zákon Dunse Scota (kontradikce je explozivní)

$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$

Z nepravdivého předpokladu lze odvodit jakýkoliv závěr. Tento zákon má zvláštní význam při dokazování bezespornosti teorií.

1.6.15 Zákon o slučování premis

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$

1.6.16 Zákon o záměně premis

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

1.6.17 Hypotetický sylogismus (tranzitivnost implikace)

$$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$$

1.6.18 Princip „reductio ad absurdum“

$$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$$

$$((\neg\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \varphi \qquad \text{(důkaz sporem)}$$

1.6.19 Důkaz rozborem případů

$$((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow \chi$$

Pokud lze pravdivost výroku dokázat pomocí dvou různých premis a platí alespoň jedna z nich, potom je výrok pravdivý.

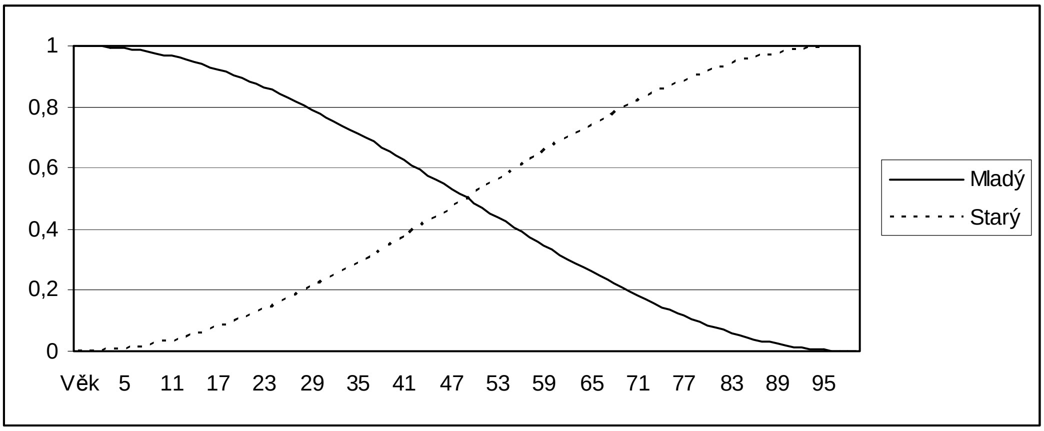
2 Výroková fuzzy logika

2.1 Výroky

Z definice 1.1.1 víme, že výrok je věta, které má smysl přiřadit pravdivostní hodnotu. Představme si ale například větu: „Ten člověk je mladý.“ Všichni víme co znamená, když je člověk mladý, jak je to ale s pravdivostí tohoto výroku? Bude tento výrok pravdivý pokud máme na mysli dvouleté dítě? A co třeba dvacetiletý, třicetiletý nebo sedmdesátiletý člověk? Jak je vidět, neumíme rozhodnout, zda je tento výrok striktně pravdivý či nepravdivý. Umíme říct pouze zda je více či méně pravdivý.

Již nám tedy nebude stačit obor pravdivostních hodnot *{0,1}*, ale rozšíříme jej na celý interval *[0,1]*, kde *0* znamená absolutní nepravdu a *1* absolutní pravdu.

Pravdivostní hodnota výroku „Ten člověk je mladý“ zjevně bude záviset na věku dotyčného. Umíme si představit i výrok opačný: „Ten člověk je starý“. Evidentně bude mezi těmito výroky nějaký vztah, druhý by například mohl být negací prvního. Průběh jejich pravdivostních hodnot by pak mohl vypadat nějak takto:



Obrázek 2.1.1

Stejně jako ve dvouhodnotové výrokové logice zabýváme se ve fuzzy logice usuzováním založeným na pravdivosti jednotlivých výroků. Ve fuzzy logice se bavíme o *přibližném usuzování*. Při usuzování se neobejdeme bez složených výroků. Obdobně jako v klasické logice zde můžeme skládat výroky pomocí výrokových spojek.

Zatímco v dvouhodnotové logice jsme měli omezený počet kombinací pravdivostních ohodnocení skládaných výroků a mohli jsme tudíž k definici jednotlivých spojek použít pravdivostní tabulky, ve fuzzy logice se pohybujeme na reálném intervalu pravdivostních hodnot. K definici výrokových spojek tedy nelze použít tabulku, ale nějaký funkční vztah. Protože složený výrok je také výrokem a jeho pravdivostní hodnota musí také ležet v intervalu [0,1], je každá binární výroková spojka s zobrazením f_s: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ (protože $f_s(x,y) \in [0,1]$ pro každé $x, y \in [0,1]$). Funkci f_s nazýváme pravdivostní funkce spojky s.

2.2 Spojité t-normy

Když volíme pravdivostní funkce výrokových spojek musíme mít na paměti, že fuzzy logika je rozšířením dvouhodnotové logiky, což znamená, že pro pravdivostní hodnoty *0* a *1* se musí výrokové spojky chovat stejně jako v dvouhodnotové logice.

Základní spojkou, z níž odvodíme všechny ostatní, je ve fuzzy logice *silná konjunkce &*. Intuitivně chápeme tuto spojku tak, že velká pravdivostní hodnota výroku $\varphi \& \psi$ by měla znamenat velkou pravdivostní hodnotu výroků φ a ψ. Můžeme tedy předpokládat, že pravdivostní funkce konjunkce je neklesající v obou parametrech. Tuto pravdivostní funkci nazveme *t-normou* (*triangulární normou*) a označíme ji *t*.

Definice 2.2.1 *t*-norma *je binární operátor t na intervalu [0,1] (tzn. t:* $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$*), který má následující vlastnosti:*

(i) *komutativnost a asociativita, tj., pro každé* $x, y, z \in [0,1]$ *platí:*

$$t(x, y) = t(y, x)$$
$$t(t(x, y), z) = t(x, t(y, z))$$

(ii) *izotonicita – t je neklesající v obou parametrech, tj. pro* $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ *platí:*

$$t(x_1, y_1) \leq t(x_2, y_2)$$

(iii) *Pro každé* $x \in [0,1]$ *platí*

$$t(1, x) = x$$
$$t(0, x) = 0$$

t je spojitá *t*-norma, *jestliže t je t-norma a je spojitým zobrazením* $t: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$.

Z podmínky (iii) vidíme, že *t*-norma je rozšířením klasické konjunkce, můžeme se snadno přesvědčit, že platí $t(1, 1) = 1$, $t(1, 0) = 0$, $t(0, 1) = 0$ a $t(0, 0) = 0$.

Toto jsou nejdůležitější spojité *t*-normy:

2.2.2 Łukasiewiczova *t*-norma

$$t_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$$

2.2.3 Gödelova *t*-norma

$$t_G(x, y) = \min(x, y)$$

2.2.4 součinová *t*-norma

$$t_\Pi(x, y) = x \cdot y$$

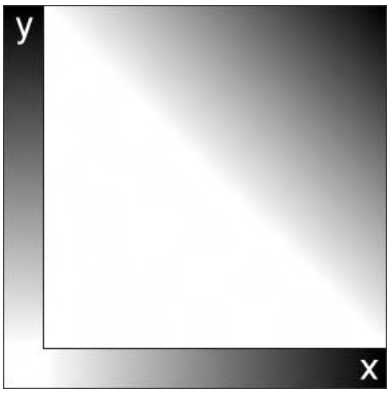
Všechny tyto *t*-normy splňují podmínky definice 2.2.1 a jsou spojité, což lze dokázat elementárním výpočtem (například pro 2.2.3 platí min (x, y) = min (y, x); min (min (x, y), z) = min (x, min (y, z)); funkce min je neklesající v obou parametrech; a pro x ∈ [0,1] platí min (1,x) = x a min (0,x) = 0).

t-norma je základem výrokového kalkulu, neboť jsou z ní odvozeny pravdivostní funkce ostatních výrokových spojek.

Existuje také druhý přístup, který jako základ výrokového kalkulu definuje *t-conormu*, která je fuzzy rozšířením klasické disjunkce. Její definici bychom získali z 2.2.1 záměnou (iii) za *t (1, x) = 1, t(0, x) = x*. V této práci však *t*-conorma nebude hrát významnou roli, protože konjunkce a disjunkce nemají společný vztah k implikaci.

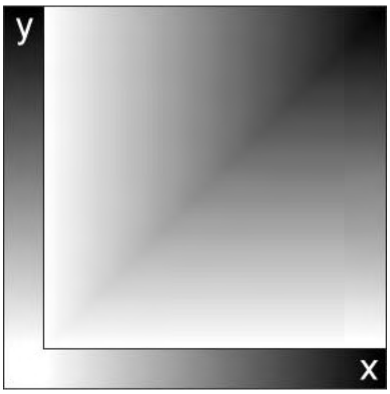
Ve dvouhodnotové logice jsme průběh pravdivostních hodnot zobrazovali pomocí tabulky. Ve fuzzy logice něco takového možného není, neboť se zabýváme zobrazeními na reálném intervalu. Pro binární operátory však můžeme použít následující grafickou ilustraci. Na osách x a y je zobrazen průběh pravdivostních hodnot proměnných x a y a v prvním kvadrantu tohoto „grafu“ průběh pravdivostních hodnot složeného výroku. Čím tmavší barva, tím větší pravdivostní hodnota, černá je tedy ekvivalentní 1 a bílá zastupuje 0.

Průběh pravdivostních hodnot Łukasiewiczovy *t*-normy *t (x, y)* bychom mohli zachytit takto:

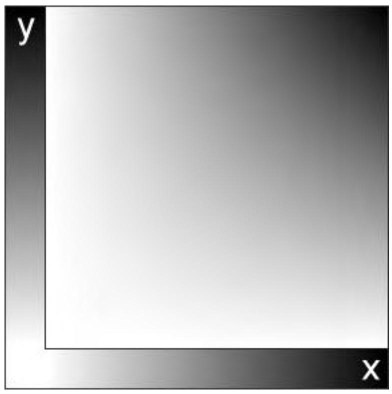


Obrázek 2.2.1

A zde jsou zachyceny pravdivostní hodnoty Gödelovy *t*-normy (nalevo) a součinové *t*-normy (vpravo):



Obrázek 2.2.2



Obrázek 2.2.3

2.3 Residuum t-normy

Nyní se budeme zabývat implikací, protože ta je pro usuzování vždy nejdůležitější logickou spojkou. Ve dvouhodnotové logice je implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ pravdivá, jestliže je pravdivostní hodnota φ menší nebo rovna pravdivostní hodnotě ψ. Toto můžeme zobecnit předpokladem, že velká pravdivostní hodnota $\varphi \Rightarrow \psi$ by měla znamenat, že pravdivostní hodnota φ není o mnoho větší, než pravdivostní hodnota ψ.

To vede k požadavku, aby pravdivostní funkce implikace $i\,(x, y)$ byla nerostoucí v parametru x a neklesající v parametru y. Také bychom měli požadovat rozumnost dedukčního pravidla *modus ponens*, tj. že z (dolní hranice) pravdivostní hodnoty x formule φ a z (dolní hranice) hodnoty pravdivostní funkce $i\,(x, y)$ formule $\varphi \Rightarrow \psi$ bychom měli být schopni spočítat dolní hranici pravdivostní hodnoty y formule ψ. Tento výpočet dolní hranice pravdivostní hodnoty y by jasně měl být neklesající v obou parametrech (čím pravdivější je premisa, tím pravdivější je závěr). Kromě toho se tato funkce musí samozřejmě také chovat klasicky pro hodnoty $0, 1$.

Výpočet dolní hranice pravdivostní hodnoty y formule ψ provedeme tak, že použijeme t-normu:

Jestliže $a \leq x$ *a* $z \leq i(x, y)$, *potom* $t(a, z) \leq y$

Pokud dosadíme $a = x$, dostaneme:

Jestliže $z \leq i(x, y)$, *potom* $t(x, z) \leq y$

Na druhou stranu, aby pravidlo *modus ponens* bylo dostatečně silné, potřebujeme definovat hodnotu $i(x, y)$ co největší. Kdykoliv tedy je $t(x, z) \leq y$, je z možný kandidát na $i(x, y)$. Proto musíme naopak požadovat:

Jestliže $t(x, z) \leq y$, *potom* $z \leq i(x, y)$

Z toho ovšem plyne, že $i(x, y)$ je *maximální* z vyhovující podmínce $t(x, z) \leq y$.

Definice 2.3.1 *Nechť t je spojitá t-norma, potom* residuum t-normy *je operace i, která pro všechna* $x, y, z \in [0,1]$ *splňuje podmínku* $t(x, z) \leq y$ *právě tehdy když* $z \leq i(x, y)$. *Platí tedy:*

$$i(x, y) = \max\{z \in [0,1];\ t(x, z) \leq y\}$$

Lemma 2.3.2 Pro každou spojitou t-normu t a její residuum i platí:

(i) $i\,(x, y) = 1$ právě tehdy když $x \leq y$

(ii) $i\,(1, x) = x$

Důkaz:

Důkaz je zřejmý z definice 2.3.1.

Pro nám již známé t-normy lze odvodit následující residua. Pro $x \leq y$ platí 2.3.2 *(i)* a pro $x > y$:

(i) ***Łukasiewiczova implikace:*** $i_L\,(x, y) = 1 - x + y$

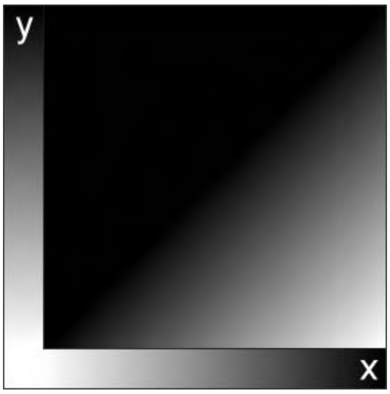
(ii) ***Gödelova implikace:*** $i_G\,(x, y) = y$

(iii) ***Goguenova implikace:*** $i_\Pi\,(x, y) = y/x$ (residuum součinové t-normy)

Za povšimnutí stojí fakt, že zatímco Łukasiewiczova implikace je spojitou funkcí, Gödelova a Goguenova nikoliv. Pro Gödelovu implikaci pro $x = y$ platí podle 2.3.2 *(i)* $i_G\ (x, y) = 1$, ale pro $x \rightarrow y^+$ $i_G\ (x, y) = y$. Gödelova implikace je tedy nespojitá zprava pro $x = y$ na intervalu $x \in [0, 1)$ a opačně není spojitá zleva pro $y = x$ na intervalu $y \in [0, 1)$. Pro Goguenovu implikaci pro $x = 0$ a $y = 0$ platí $i_\Pi\ (x, y) = 1$, ale pro $y = 0$ a $x \rightarrow 0^+$ platí $i_\Pi\ (x, y) = 0$. Goguenova implikace je nespojitá zprava pro *x* a zleva pro *y* v bodě $[x, y] = [0, 0]$.

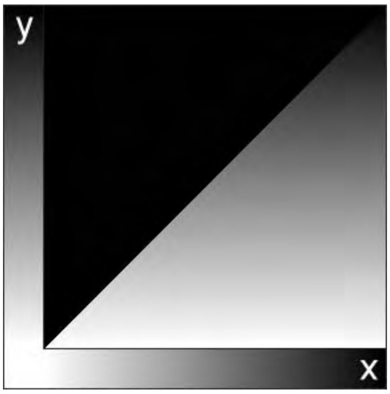
Lze ovšem jednoduše ukázat (podle definice a 2.3.2 *(i)*), že reziduum každé spojité *t*-normy je spojité zleva pro *x* a zprava pro *y*.

Průběh pravdivostních hodnot implikace *i (x, y)* opět můžeme zachytit graficky. Takto vypadá průběh Łukasiewiczovy implikace:

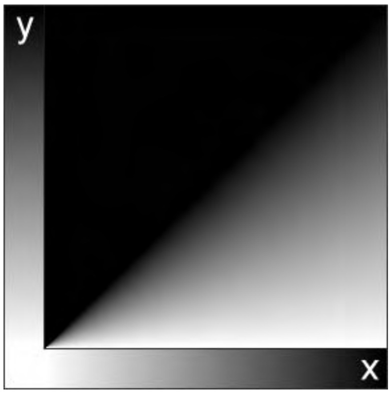


Obrázek 2.3.1

A takto zachytíme průběhy Gödelovy implikace (nalevo) a Goguenovy implikace (vpravo):



Obrázek 2.3.2



Obrázek 2.3.3

2.4 Ostatní výrokové spojky

Jestliže stanovíme *t*-normu, ustanovíme celý výrokový kalkul (jehož obor hodnot je [0,1]), kde funkce *t (x, y)* je pravdivostní funkcí (silné) konjunkce a její residuum *i (x, y)* je pravdivostní funkcí implikace.

Definice 2.4.1 *Jazyk* výrokové fuzzy logiky *VL (t) určené t-normou t obsahuje výrokové proměnné φ, χ, ψ ..., výrokové spojky &, $\Rightarrow$ a pravdivostní konstantu $\bar{0}$ pro nepravdu. Formule jsou definovány takto: Každá výroková proměnná je formule, $\bar{0}$ je formule. Jestliže φ a ψ jsou formule, potom i φ & ψ a $\varphi \Rightarrow \psi$ jsou formule. Žádné jiné výrazy nejsou formule.*

Definice 2.4.2 *Ostatní výrokové spojky výrokové logiky VL (t) jsou definovány takto:*

$$\neg\varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varphi \Rightarrow \bar{O}$$

$$\varphi \wedge \psi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)$$

$$\varphi \vee \psi \overset{def}{\Longleftrightarrow} ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\varphi \Rightarrow \psi) \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \varphi)$$

Definice 2.4.3 Ohodnocení výrokových proměnných *je zobrazení val, které každé výrokové proměnné φ přiřazuje její pravdivostní hodnotu val (φ) $\in$ [0, 1]. Ohodnocení ostatních formulí je definováno takto:*

$$val(\bar{O}) = 0$$

$$val(\varphi \mathbin{\&} \psi) = t(val(\varphi), val(\psi))$$

$$val(\varphi \Rightarrow \psi) = i(val(\varphi), val(\psi))$$

Pro ohodnocení formulí tvořených spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$ nebo $\Leftrightarrow$ je třeba nejprve tyto spojky nahradit &, $\Rightarrow$ a $\bar{O}$ pomocí definičních rovností.

Lemma 2.4.4 *Ve výrokové logice definované libovolnou spojitou t-normou platí pro libovolné formule φ a ψ:*

$$val(\varphi \wedge \psi) = \min(val(\varphi), val(\psi))$$

$$val(\varphi \vee \psi) = \max(val(\varphi), val(\psi))$$

Důkaz:

Pokud položíme $x = val(\varphi)$ a $y = val(\psi)$, potom $val(\varphi \wedge \psi) = t(x, i(x, y))$. Pro $x \leq y$ platí $i(x, y) = 1$ a tedy $t(x, i(x, y)) = x$. Pro $x > y$ platí (z definice 2.3.1) $t(x, i(x, y)) = y$. Obdobně lze provést rozklad formule $\varphi \vee \psi$.

Z této rovnosti je vidět, proč se někdy operace $\wedge$ označuje jako *min-konjunkce* a operace $\vee$ *max-disjunkce*. Pro operaci & lze přímo z definice 2.2.1 odvodit

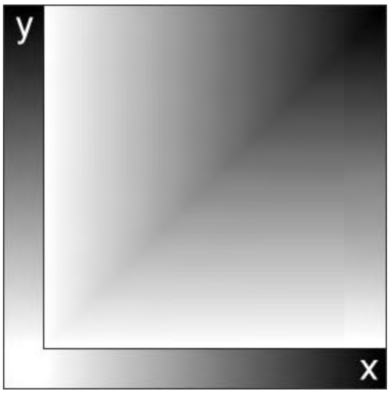
$$t(x, y) \leq \min(x, y),$$

a proto

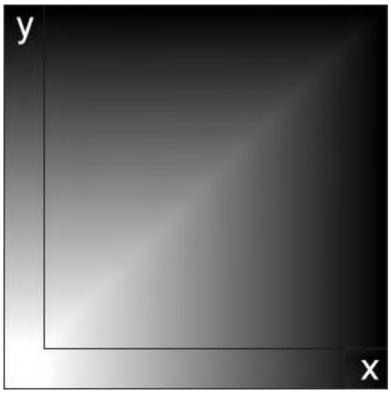
$$val(\varphi \mathbin{\&} \psi) \leq val(\varphi \wedge \psi).$$

Proto se operaci & říká *silná konjunkce*. Zároveň se ukazuje, že v Gödelově logice $VL(t_G)$ silná konjunkce & s obvyklou konjunkcí $\wedge$ splývá.

Protože průběh pravdivostních hodnot min-konjunkce a max-disjunkce je ve všech VL shodný, bude shodné i jeho grafické znázornění. Zde je znázorněna min-konjunkce (nalevo) a max-disjunkce (napravo).



Obrázek 2.4.1



Obrázek 2.4.2

2.5 Základní výroková logika

Obdobně jako ve dvouhodnotové logice existují ve výrokové fuzzy logice výroky vždy pravdivé. Abychom zdůraznili jejich absolutní pravdivost, označujeme je jako *1-tautologie*.

Definice 2.5.1 *Formule φ je* 1-tautologie *výrokové logiky VL (t), pokud pro libovolné pravdivostní hodnoty podformulí je val (φ) = 1.*

V každé výrokové logice *VL (t)* existuje určitá množina 1-tautologií. Pro různé *t*-normy budou ale tyto množiny obecně různé. V každé *VL (t)* existuje také určitá minimální množina 1-tautologií, ze které lze ostatní 1-tautologie odvodit, 1-tautologie z této množiny označujeme jako *axiomy VL (t).*

Základní výroková logika ZL je společným základem pro každou výrokovou logiku. *ZL* je silná, její axiomy tedy platí v každé výrokové logice *VL (t)* a samozřejmě i v klasické dvouhodnotové výrokové logice.

Definice 2.5.2 *Následující formule jsou axiomy ZL:*

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(A2) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$

(A3) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \varphi)$

(A4) $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$

(A5a) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi)$

(A5b) $((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

(A7) $\bar{0} \Rightarrow \varphi$

Dedukčním pravidlem v *ZL* je *modus ponens*. Díky tomu jsou pojmy *dokazovat* a *dokazatelnost* definovány obvyklým způsobem.

(A1) vyjadřuje tranzitivnost implikace, *(A2)* říká, že pravdivost silné konjunkce znamená pravdivost jejího prvního elementu, a podle *(A3)* je silná konjunkce komutativní. *(A4)* zachycuje

komutativnost min-konjunkce, *(A5)* vyjadřuje sdružování předpokladů a *(A6)* je variantou důkazu rozborem případů. Konečně *(A7)* říká, že z nepravdivého předpokladu lze odvodit jakýkoliv závěr.

Lemma 2.5.3 *Všechny axiomy ZL jsou 1-tautologie v libovolné VL (t). Každá formule dokazatelná v ZL je tedy 1-tautologií v každé VL(t).*

Důkaz:

Toto lemma je dokázáno v [1] na str. 37.

Lemma 2.5.4 *ZL dokazuje následující vlastnosti implikace:*

(1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(2) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(3) $\varphi \Rightarrow \varphi$

Důkaz:

Body *(1)* a *(2)* jsou dokázány v [1], str. 38.

Pokud ve *(2)* položíme $\chi = \varphi$, získáváme formuli $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$, jejíž premisou je *(1)*, proto s použitím pravidla modus ponens dokážeme $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$. Protože $\varphi \Rightarrow \varphi$ plyne z libovolného předpokladu, je tedy bod *(3)* dokázán.

Lemma 2.5.5 *V ZL jsou dokazatelné následující vlastnosti silné konjunkce:*

(4) $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$

(5) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi))$

(6) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \chi))$

(7) $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\chi \Rightarrow \omega)) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \omega))$

(8a) $(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \Rightarrow \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$

(8b) $\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi$

Důkaz:

(4), *(5)*, *(6)*, *(7)* a *(8)* jsou dokázány v [1], str. 39.

Lemma 2.5.6 *ZL dokazuje tyto vlastnosti min-konjunkce*

(9a) $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$

(9b) $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$

(9c) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

(10) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

(11) $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(12) $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \chi))$

Důkaz:

Podle *(A2)* platí $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$, a proto i $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \varphi$, což lze psát jako $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ tedy *(9a)*.

Dosazením *(A2)* do *(A4)* dostaneme $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \psi$, z čehož podle *(2)* a *(A1)* plyne $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$, což je jen jiný zápis pro $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$, tedy *(9b)*.

Podle *(1)* $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ a použijeme-li *(6)* a *(A3)*, dostaneme $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi))$, což je $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, tedy *(9c)*.

(A4) je $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$, což lze psát jako $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\psi \wedge \varphi)$ tedy *(11)*.

Body *(10)* a *(12)* dokazuje Hájek v [1], str. 39.

Lemma 2.5.7 *ZL dokazuje následující vlastnosti max-disjunkce*

(13a) $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

(13b) $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

(13c) $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$

(14) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \psi)$

(15) $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)$

(16) $((\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)$

Důkaz:

Podle *(3)* a *(2)* platí $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$ a podle definice implikace a *(2)* také $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ a z toho podle *(12)* plyne $\varphi \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi))$, což lze zapsat jako $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$, tedy *(13a)*.

Podle *(13a)* a *(11)* zřejmě také platí *(13b)*.

Z definice $\varphi \vee \psi$ je $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ a podle *(11)* $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi))$, tedy $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$ čili *(13c)*.

Důkaz *(14)*, *(15)* a *(16)* je v [1], str. 40.

Lemma 2.5.8 *V ZL jsou dokazatelné následující vlastnosti negace:*

(17) $\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$

tedy $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ *a* $(\varphi \& \neg\varphi) \Rightarrow \bar{O}$

(18a) $(\varphi \Rightarrow (\psi \& \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$

(18b) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

(18c) $(\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

Důkaz:

Důkaz *(17)*, *(18a)*, *(18b)* i *(18c)* je v [1] na str. 41.

Lemma 2.5.9 *V ZL jsou dokazatelné tyto vlastnosti ekvivalence:*

(19) $\varphi \Leftrightarrow \varphi$

(20) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Leftrightarrow \varphi)$

(21) $((\varphi \Leftrightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Leftrightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \chi)$

(22a) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$

(22b) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(23) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\psi \,\&\, \chi))$

(24) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(25) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\chi \Rightarrow \psi))$

(26) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$

Důkaz:

Podle definice lze $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ psát jako $(\varphi \Rightarrow \varphi)\&(\varphi \Rightarrow \varphi)$, což je podle *(3)* zjevně pravdivé. *(19)* tedy platí.

$((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi))$ je pravdivé podle *(A3)*, tím tedy platí *(20)*.

Podle *(A1)* a *(A5a)* platí $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ a rovněž $((\chi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi))$. Podle *(7)* tedy platí $(((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \chi)) \,\&\, ((\chi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi)\& (\chi \Rightarrow \varphi))$, podle *(8)* potom $(((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \,\&\, ((\psi \Rightarrow \chi) \,\&\, (\chi \Rightarrow \psi))) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi)\& (\chi \Rightarrow \varphi))$, což je $((\varphi \Leftrightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Leftrightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \chi)$, tedy *(21)*.

Podle definice $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$, platí tedy $((\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)) \,\&\, ((\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$, což dokazuje jak *(22a)*, tak i *(22b)*.

Podle *(6)* platí $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \chi))$ a také $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\psi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \chi))$, podle *(7)* tedy $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (((\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \chi)) \,\&\, ((\psi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \chi)))$, což je jen jiný zápis pro $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\psi \,\&\, \chi))$, čili *(23)*.

Podle *(A1)* $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$ a také $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$. Podle *(7)* platí $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)) \,\&\, ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)))$, což je $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$, tedy *(24)*.

Podle *(A1)* platí $(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi))$ a také $(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi))$, z čehož použitím *(2)* dostaneme $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi))$ a $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi))$. Podle *(7)* platí $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (((\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \,\&\, ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)))$ a to lze psát jako $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\chi \Rightarrow \psi))$, tedy *(25)*.

Podle definice platí $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$ a podle *(9c)* tedy i $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$.

2.6 Łukasiewiczova výroková logika

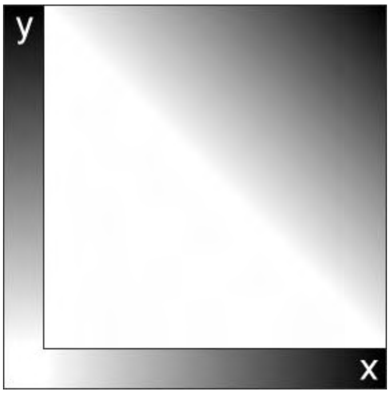
Nyní se budeme blíže zabývat Łukasiewiczovou výrokovou logikou $VL(t_L)$, kde t_L je Łukasiewiczova *t*-norma, která definuje pravdivostní funkci silné konjunkce.

$$t_L(x, y) \quad = \quad max\,(0, x + y - 1)$$

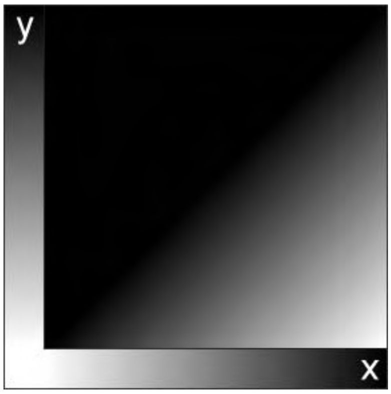
Předpis jejího residua, jež definuje pravdivostní funkci implikace vypadá takto:

$$i_L\ (x, y) \quad = \quad min\ (1, 1 - x + y)$$

Grafické znázornění jejich průběhu vypadá takto (t_L vlevo, i_L vpravo):



Obrázek 2.6.1



Obrázek 2.6.2

Pro odvození průběhu pravdivostních hodnot ostatních výrokových spojek musíme použít jejich definice 2.4.2.

Pro min-konjunkci a max-disjunkci platí podle 2.4.4:

$$val\ (\varphi \wedge \psi) \quad = \quad min\ (\ val\ (\varphi), val\ (\psi))$$

$$val\ (\varphi \vee \psi) \quad = \quad max\ (\ val\ (\varphi), val\ (\psi))$$

a jejich průběhy jsou graficky znázorněny na obrázcích 2.4.1 a 2.4.2.

Pokud stanovíme $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$, pak pro ekvivalenci platí

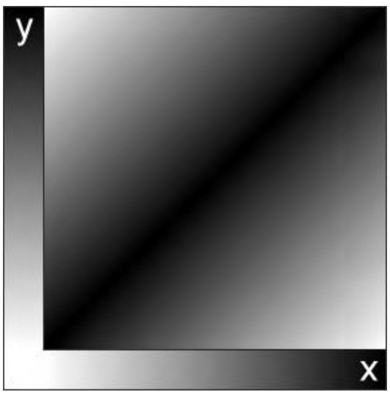
$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad t_L\ (i_L\ (x, y), i_L\ (y,x)),\ \text{tedy}$$

$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad max\ (0, min\ (1, 1 - x + y) + min\ (1, 1 - y + x) - 1),$$

což lze zjednodušit takto:

$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad min\ (1 - x + y, 1 - y + x).$$

Grafické znázornění průběhu pravdivostních hodnot Łukasiewiczovy ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ pro $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$ vypadá takto:



Obrázek 2.6.3

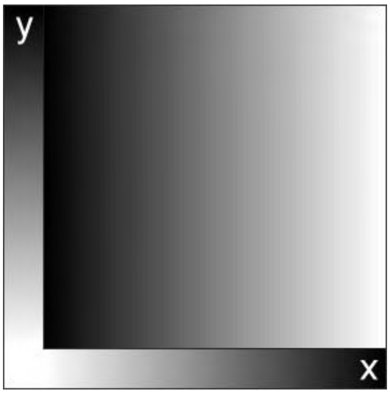
Z definice negace $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \bar{0})$ lze odvodit průběh jejích pravdivostních hodnot jako (opět pro $x = val\ (\varphi)$)

$$val\ (\neg\varphi) \quad = \quad min\ (1, 1 - x)$$

a protože $x \in [0, 1]$, lze toto zjednodušit na

$$val\ (\neg\varphi) \quad = \quad 1 - x.$$

Grafické znázornění průběhu pravdivostní funkce Łukasiewiczovy negace, respektive funkce $val\ (\neg\varphi)$, kde $x = val\ (\varphi)$, zachycuje obr. 2.6.4. (pozn.: hodnota y pochopitelně nemá žádný význam)



Obrázek 2.6.4

Povšimněme si nyní následující rovnosti $val\ (\neg\neg\varphi) = 1 - val\ (\neg\varphi) = 1 - (1 - val\ (\varphi)) = val\ (\varphi)$. Díky tomu ve $VL\ (t_L)$ platí

$$\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$$

Lemma 2.6.1 *Ve VL* (t_L) *platí zákon dvojité negace*

$(\neg\neg) \quad \varphi \Leftrightarrow \neg\neg\varphi$

Důkaz:

Podle *(17)* platí $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ a spolu s $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ platí i $\varphi \Leftrightarrow \neg\neg\varphi$.

Protože Łukasiewiczově logice platí zákon dvojí negace lze zde definovat také spojku silné disjunkce jako duální operaci k silné konjunkci. Tato spojka je definována tak, aby splňovala zákon o vyjádření implikace.

$$\varphi \vee_S \psi \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \neg\varphi \Rightarrow \psi$$

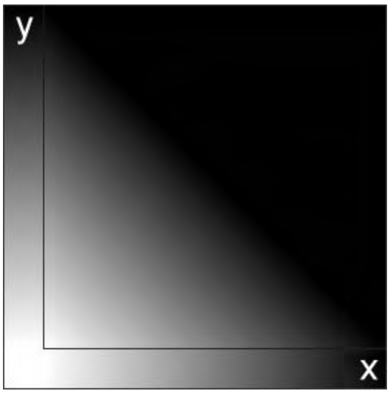
Pravdivostní funkci této spojky lze odvodit takto:

$$val\ (\varphi \vee_S \psi) \quad = \quad min\ (1, val\ (\varphi) + val\ (\psi))$$

Platí tedy pro libovolná ohodnocení φ a ψ

$$val\ (\varphi \vee \psi) \quad \leq \quad val\ (\varphi \vee_S \psi).$$

Průběh hodnot silné disjunkce znázorníme pro $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$ takto:



Obrázek 2.6.5

Díky zákonu $(\neg\neg)$ má Łukasiewiczova logika poněkud odlišné vlastnosti od Gödelovy nebo součinové logiky, zejména kvůli existenci silné disjunkce $\vee_S$, což bude patrné dále, až budeme porovnávat tautologie dvouhodnotové logiky s fuzzy logikou.

2.7 Gödelova výroková logika

Gödelova výroková logika $VL\ (t_G)$ je dána Gödelovou t-normou t_G, která pravdivostní funkci konjunkce definuje jako minimum.

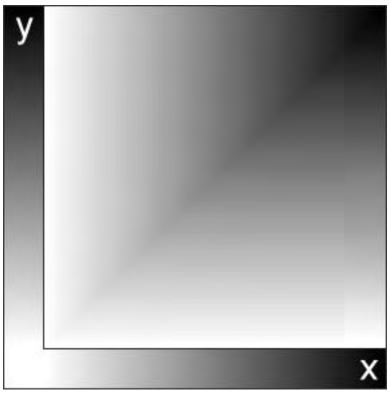
$$t_L\ (x, y) \quad = \quad min\ (x, y)$$

Pravdivostní funkce Gödelovy implikace i_G, neboli reziduum t_G, je dána takto

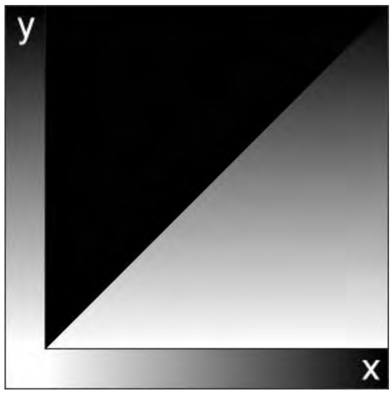
$$i_L\ (x, y) \quad = \quad y, \qquad \text{pro } x > y,$$

$$i_L\ (x, y) \quad = \quad 1 \qquad \text{jinak.}$$

Grafická znázornění Gödelovy t-normy (vlevo) a jejího rezidua (vpravo) vypadají takto:



Obrázek 2.7.1



Obrázek 2.7.2

Lemma 2.7.1 *Ve $VL\ (t_G)$ platí zákon*

$(G) \qquad \varphi \Rightarrow (\varphi\ \&\ \varphi)$

Důkaz:

Elementárním výpočtem, pro $x = val\ (\varphi)$ získáváme $i_L\ (x, min\ (x, x))$, což odpovídá $i_L\ (x, x)$, a protože $x = x$, je tento výraz roven 1.

Výrok $\varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$ je tedy tautologií.

Lemma 2.7.1 *V VL* (t_G) *je dokazatelné*

(G1) $(\varphi \,\&\, \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$

Důkaz:

Již víme, že pro min-konjunkci a max-disjunkci platí podle 2.4.4 pro všechny *VL (t)*:

$$val\ (\varphi \wedge \psi) \quad = \quad min\ (\ val\ (\varphi), val\ (\psi))$$

$$val\ (\varphi \vee \psi) \quad = \quad max\ (\ val\ (\varphi), val\ (\psi))$$

V Gödelově logice $VL\ (t_G)$ ale platí také

$$val\ (\varphi \,\&\, \psi) \quad = \quad min\ (\ val\ (\varphi), val\ (\psi)),$$

a proto $val\ (\varphi \,\&\, \psi) = val\ (\varphi \wedge \psi)$, takže $(\varphi \,\&\, \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

Silná konjunkce *&* zde splývá s min-konjunkcí $\wedge$, v Gödelově logice tedy mezi nimi nerozlišujeme a konjunkci označujeme jako $\wedge$.

Průběh pravdivostních hodnot konjunkce zachycuje obr. 2.7.1 a disjunkce 2.4.2.

Pro Gödelovu ekvivalenci platí, za předpokladu $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$:

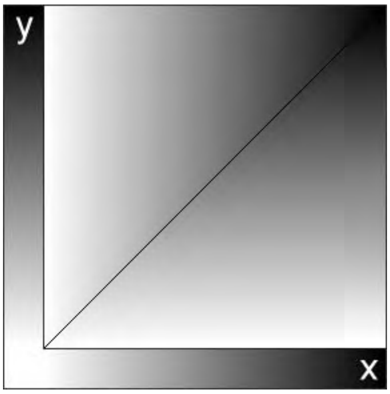
$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad t_G\ (i_G\ (x, y), i_G\ (y,x))$$

po dosazení a elementárním výpočtu dostaneme tento předpis Gödelovy ekvivalence:

$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad 1 \qquad \text{pro } val\ (\varphi) = val\ (\psi)$$

$$val\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad min\ (val\ (\varphi), val\ (\psi)) \qquad \text{pro } val\ (\varphi) \neq val\ (\psi).$$

Obrázek 2.7.3 zachycuje grafické znázornění průběhu pravdivostní funkce Gödelovy ekvivalence.



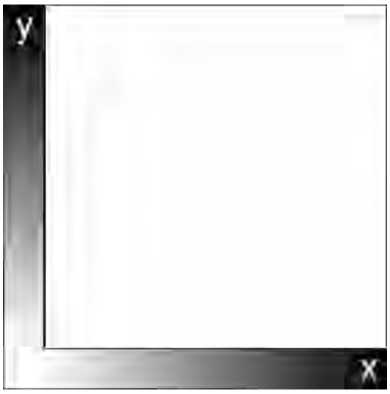
Obrázek 2.7.3

Průběh pravdivostní funkce negace $\neg\varphi$ odvodíme opět z definice $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \bar{O})$. Protože $val(\varphi) > val\ (\bar{O})$ pro všechna $\varphi : val\ (\varphi) > 0$, je pro tato φ hodnota negace rovna 0. Pro φ: $val\ (\varphi) = 0$, je hodnota negace rovna 1. Předpis funkce Gödelovy negace tedy vypadá takto:

$val\ (\neg\varphi)$	=	1	pro $val\ (\varphi) = 0$
$val\ (\neg\varphi)$	=	0	pro $val\ (\varphi) \neq 0.$

Ve $VL\ (t_G)$ tedy neplatí $(\neg\neg)$, neboť pro všechna φ: $val\ (\varphi) \in (0, 1)$ dostaneme jiný výsledek. Důvodem tohoto je, že residuum Gödelovy t-normy je nespojitou funkcí, a protože negace je definována pomocí tohoto residua, je i ona nespojitá.

Průběh pravdivostní funkce Gödelovy negace $\neg\varphi$ je zobrazen na obr. 2.7.4. I zde platí $x = val\ (\varphi)$ a y nemá žádný vliv.



Obrázek 2.7.4

Jedinečností Gödelovy logiky je idempodentní konjunkce (tj. $(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$), kterou můžeme dokázat jednoduše, protože pokud současně platí $(A2)$ – $(\varphi\ \&\ \varphi) \Rightarrow \varphi$ – a (G) – $\varphi \Rightarrow (\varphi\ \&\ \varphi)$ –, musí tedy také platit $((\varphi\ \&\ \varphi) \Rightarrow \varphi)\ \&\ (\varphi \Rightarrow (\varphi\ \&\ \varphi))$, což je podle definice $((\varphi\ \&\ \varphi) \Leftrightarrow \varphi)$, a protože v Gödelově logice splývá silná konjunkce s klasickou, platí také $(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$.

2.8 Součinová logika

Poslední, nikoliv však méně významná, z nejdůležitějších logik je součinová logika *VL* (t_Π), kde t_Π je součinová *t*-norma (*Π – produkt – tj. součin*).

Součinová *t*-norma, určující pravdivostní funkci konjunkce, definuje konjunkci jako součin, její předpis tedy vypadá takto:

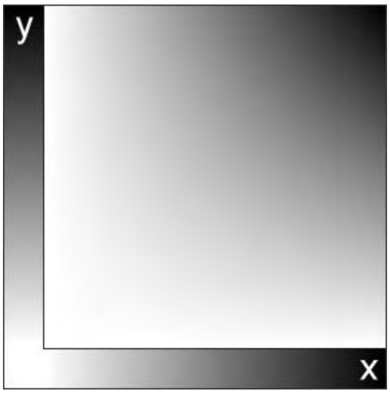
$t_\Pi(x, y) \quad = \quad x.y$ *(součin reálných čísel)*

Residuem součinové *t*-normy je Goguenova implikace a její předpis je následující:

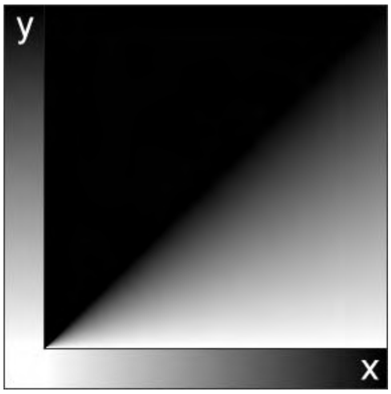
$i_\Pi(x, y) \quad = \quad y / x$ pro $x > y$

$i_\Pi(x, y) \quad = \quad 1$ pro $x \leq y$

Grafické znázornění průběhu těchto dvou funkcí je zachyceno zde (t_Π vlevo, i_Π vpravo)



Obrázek 2.8.1



Obrázek 2.8.2

Ve *VL* (t_Π) platí rovněž pro min-konjunkci a max-disjunkci lemma 2.4.4

$val(\varphi \wedge \psi) \quad = \quad min(val(\varphi), val(\psi))$

$val(\varphi \vee \psi) \quad = \quad max(val(\varphi), val(\psi))$

a grafické znázornění jejich průběhů je zachyceno na obrázcích 2.4.1 a 2.4.2.

Průběh pravdivostní funkce součinové ekvivalence odvodíme opět z definice $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$. Pokud dosadíme $x = val(\varphi)$ a $y = val(\psi)$, dostaneme

$val(\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad t_\Pi(i_\Pi(x, y), i_\Pi(y, x)),$

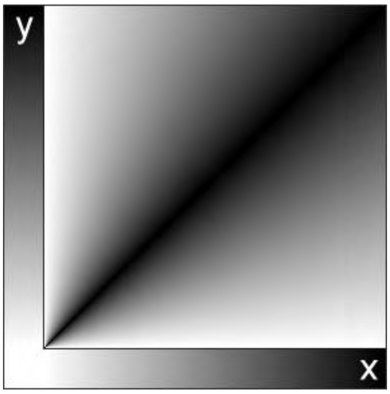
takže po elementárním rozkladu bude předpis ekvivalence vypadat takto:

$val(\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad y / x$ pro $x < y$,

$val(\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad x / y$ pro $x > y$ a

$val(\varphi \Leftrightarrow \psi) \quad = \quad 1$ pro $x = y$.

Průběh pravdivostních hodnot součinové ekvivalence lze graficky znázornit takto:

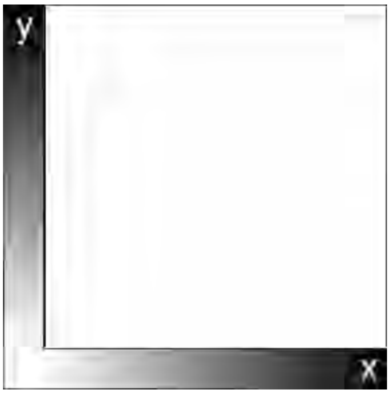


Obrázek 2.8.3

Předpis negace odvodíme z definice $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \bar{O})$. Protože $val(\varphi) > val(\bar{O})$ pro všechna $\varphi : val(\varphi) > 0$, je pro tato φ hodnota negace rovna $val(\bar{O}) / val(\varphi)$, což je 0. Pro φ: $val(\varphi) = 0$, je hodnota negace rovna 1. Předpis funkce součinové negace tedy vypadá obdobně jako Gödelova negace:

$val(\neg\varphi)$	=	1	pro $val(\varphi) = 0$
$val(\neg\varphi)$	=	0	pro $val(\varphi) \neq 0$.

Grafické znázornění průběhu této negace bude tedy shodné s Gödelovou negací:



Obrázek 2.8.4

Lemma 2.8.1 *Ve VL (t_Π) platí zákon sporu*

(Π) $(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \bar{O}$

Důkaz:

Podle předpisu součinové negace musí být $val(\varphi) = 0$ nebo $val(\neg\varphi) = 0$, a proto $min(val(\varphi), val(\neg\varphi)) = 0$. Získáváme tedy $\bar{O} \Rightarrow \bar{O}$, což je 1-tautologie podle *(A7)*.

Protože jsou negace v součinové i Gödelově logice shodné, platí tento zákon i ve *VL (t_G)*.

3 Klasické tautologie a fuzzy logika

Nyní se pokusíme ověřit platnost, popřípadě dokázat neplatnost, některých důležitých tautologií dvouhodnotové výrokové logiky ve fuzzy logice. Budeme se zabývat výhradně tautologiemi uvedenými v 1.6, protože ty jsou velmi často používané.

U každé tautologie se nejprve pokusíme dokázat, zda je 1-tautologií v *ZL* a pokud není, prozkoumáme její chování v jednotlivých výrokových fuzzy logikách, konkrétně Łukasiewiczově $VL\ (t_L)$, Gödelově $VL\ (t_G)$ a součinové $VL\ (t_\Pi)$.

3.1 Zákon totožnosti

$$\varphi \Rightarrow \varphi$$

Zákon totožnosti je základní vlastností implikace v *ZL* a jeho platnost jsme již dokázali ve 2.5 jako *(3)*.

Formule $\varphi \Rightarrow \varphi$ je tedy 1-tautologií v každé $VL\ (t)$, definované libovolnou *t*-normou.

3.2 Zákon dvojité negace

$$\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$$

V *ZL* jsme dokázali $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ jako *(17)*. Proto, aby platil zákon dvojité negace, bychom museli dokázat ještě $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$.

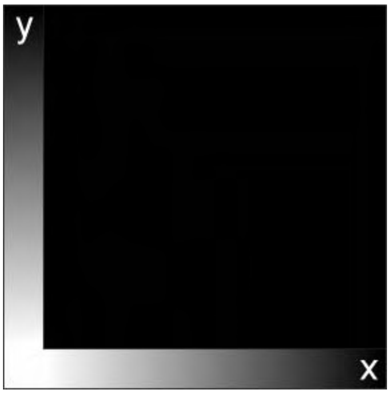
Tuto formuli můžeme zapsat jako $((\varphi \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \varphi$. Z premisy můžeme podle *(A6)* získat $((\varphi \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow (((\bar{O} \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \bar{O})$. Závěr této formule je 1-tautologií (lze ověřit jednoduchým výpočtem) a tak jsme nedokázali nic jiného než $val\ (\neg\neg\varphi) \leq 1$. Pokud by platilo $(((\bar{O} \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \bar{O}) \Rightarrow \varphi$, byl by 3.2 dokázán, to ale platí obecně pouze pro $val\ (\varphi) = 0$ a $val\ (\varphi) = 1$.

Platnost zákonu dvojité negace v *ZL* se nám tedy nepodařilo dokázat.

3.2.1 VL (t_L)

Platnost zákona dvojité negace dvojité negace jsme již odvodili jako 2.6.1.

V Łukasiewiczově výrokové logice tedy zákon dvojí negace platí, tj. $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ je 1-tautologií. Průběh pravdivostního ohodnocení této formule bychom mohli graficky znázornit při dosazení $x = val\ (\varphi)$ takto ($y = val\ (\psi)$, nemá tedy žádný vliv):



Obrázek 3.2.1

Jak je patrno, všechny 1-tautologie mají stejný průběh pravdivostních hodnot (resp. jejich ohodnocení je vždy rovno *1*), grafické znázornění tohoto průběhu bude tedy u všech 1-tautologií shodné. Proto jej nebudeme dále uvádět.

3.2.2 VL (t_G)

Aby platilo $\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$, musí platit

$$1 = t_G\,(i_G(i_G(i_G(x,0),\,0),\,x),\,i_G(x,\,i_G(i_G(x,0),\,0))),\text{ takže}$$

$$1 = \min\,(i_G(i_G(i_G(x,0),\,0),\,x),\,i_G(x,\,i_G(i_G(x,0),\,0))),$$

a proto tedy musí platit

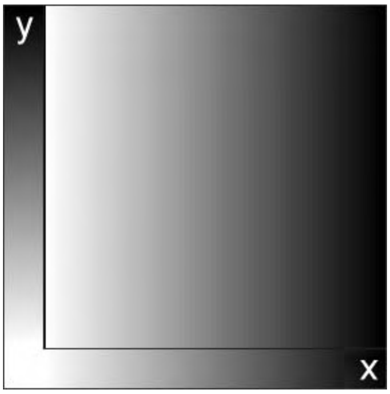
$$1 = i_G(i_G(i_G(x,0),\,0),\,x) \quad \text{a zároveň}$$

$$1 = i_G(x,\,i_G(i_G(x,0),\,0))$$

což platí pouze pro $x \in \{0, 1\}$.

V Gödelově logice je tedy $\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$ sice splnitelná formule, leč nejedná se o 1-tautologii.

Z grafického znázornění průběhu pravdivostních hodnot je hned vše jasné.



Obrázek 3.2.2

3.2.3 VL (t_Π)

Obdobně jako v předchozích logikách, aby platilo $\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$, musí být splněno

$$1 = t_\Pi\,(i_\Pi(i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0),\,x),\,i_\Pi(x,\,i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0)))\ \text{a tedy}$$

$$1 = (i_\Pi(i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0),\,x)\,.\,i_\Pi(x,\,i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0)).$$

Protože $x \in [0,\,1]$, musí platit

a) $\quad 1 = (i_\Pi(i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0),\,x)$

b) $\quad 1 = i_\Pi(x,\,i_\Pi(i_\Pi(x,0),\,0)).$

Protože podmínky pravdivé implikace jsou stejné, má tato soustava shodné řešení jako v Gödelově logice, tedy $x \in \{0,\,1\}$. Zákon dvojité negace tedy neplatí ani v součinové logice.

Průběh pravdivostních hodnot je rovněž stejný jako v Gödelově logice, a proto postačí obrázek 3.2.2.

3.3 *Zákon vyloučeného třetího*

$\varphi \vee \neg\varphi$

Zákon vyloučeného třetího není v *ZL* dokazatelný. Někdy se o fuzzy logice nesprávně mluví jako o logice, kde neplatí zákon vyloučeného třetího. Intuitivně se totiž nabízí výklad takový, že pravdivost výroku může nabývat jen dvou hodnot.

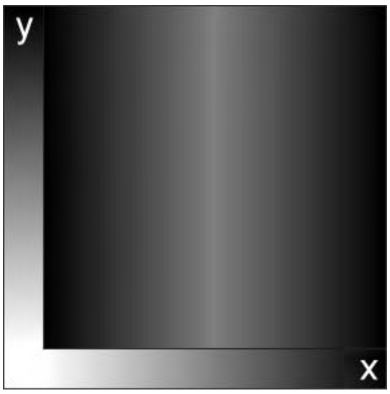
Zkusme se ale podívat, jak se tato formule chová v jednotlivých fuzzy logikách.

3.3.1 VL (t_L)

Zkusme určit funkční předpis průběhu pravdivostních hodnot formule $\varphi \vee \neg\varphi$. Víme, že ve všech logikách platí $val\,(\varphi \vee \psi) = max\,(val\,(\varphi),\,val\,(\psi))$, a také, že v Łukasiewiczově logice $val\,(\neg\varphi) = 1 - val\,(\varphi)$. Proto

$$val\,(\varphi \vee \neg\varphi) = max\,(val\,(\varphi),\,1 - val\,(\varphi)).$$

Tato formule tedy jasně není 1-tautologií a její průběh pravdivostních hodnot je graficky znázorněn takto:



Obrázek 3.3.1

Pokud namísto klasické max-disjunkce použijeme pro ověření zákona vyloučeného třetího Łukasiewiczovu silnou disjunkci (ověřujeme tedy platnost formule $\varphi \vee_S \psi$) bude toto její funkční předpis

$$val\ (\varphi \vee_S \neg\varphi) = min\ (1, val\ (\varphi) + 1 - val\ (\varphi)), \text{ a tedy}$$

$$val\ (\varphi \vee_S \neg\varphi) = min\ (1, 1), \text{ takže}$$

$$val\ (\varphi \vee_S \neg\varphi) = 1.$$

Formule $\varphi \vee_S \neg\varphi$ je tedy ve $VL\ (t_L)$ 1-tautologií.

Pokud tedy uvažujeme použití unikátní Łukasiewiczovy silné disjunkce, pak zákon vyloučeného třetího v Łukasiewiczově logice platí.

3.3.2 VL (t_G)

Průběh pravdivostních hodnot formule můžeme ve $VL\ (t_G)$ rozepsat takto:

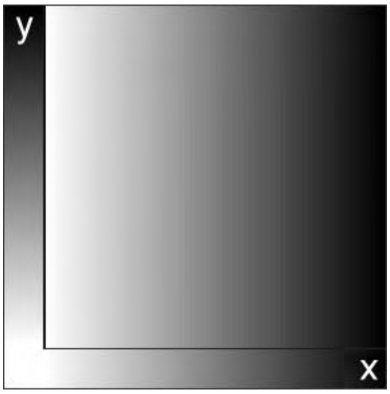
$$val\ (\varphi \vee \neg\varphi) = max\ (val\ (\varphi), 0) \quad \text{pro } val\ (\varphi) > 0$$

$$val\ (\varphi \vee \neg\varphi) = max\ (val\ (\varphi), 1) \quad \text{pro } val\ (\varphi) = 0$$

$val\ (\varphi \vee \neg\varphi) = 1$ tedy pouze pro $val\ (\varphi) \in \{0, 1\}$.

Formule $\varphi \vee \psi$ tedy není 1-tautologie a zákon vyloučeného třetího tudíž v Gödelově logice neplatí.

Takto bychom znázornili průběh pravdivostních hodnot této formule (opět pro $x = val\ (\varphi)$).



Obrázek 3.3.2

3.3.3 VL (t_Π)

V součinové logice je pravdivostní funkce negace shodná s funkcí negace v Gödelově logice a pravdivostní funkce disjunkce je shodná ve všech logikách. Proto mají všechny formule složené jen z disjunkce a negace v součinové a Gödelově logice stejný průběh. Tak je tomu i případě formule $\varphi \vee \neg\varphi$.

Rozbor této formule můžeme provést stejně jako v Gödelově logice a výsledek bude stejný. Ani v součinové logice proto zákon vyloučeného třetího neplatí.

3.4 Zákon sporu

$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

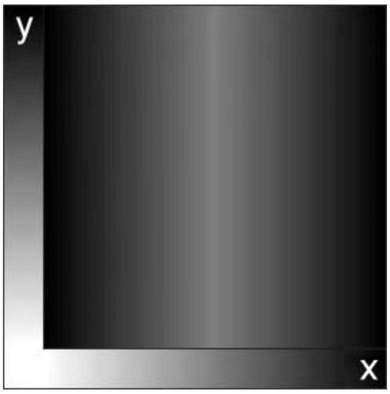
V *ZL* zákon sporu dokazatelný není, záleží tedy na konkrétní použité *t*-normě.

3.4.1 VL (t_L)

Ve *VL* (t_L) jsou jednoduché pravdivostní funkce jak negace tak i konjunkce, proto vyjádříme funkční předpis formule $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ takto:

$$val(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 1 - min(val(\varphi), 1 - val(\varphi)), \text{ takže}$$
$$val(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = max(1 - val(\varphi), val(\varphi)),$$

což zřetelně není tautologie. Průběh pravdivostních hodnot je následující (pro $x = val(\varphi)$):



Obrázek 3.4.1

V Łukasiewiczově logice tedy zákon sporu neplatí.

3.4.2 VL (t_G) a VL (t_Π)

Pravdivostní funkce negace i min-konjunkce jsou ve *VL* (t_G) a *VL* (t_Π) shodné, můžeme tedy provést rozbor pro obě společně.

Pro $\varphi \wedge \neg\varphi$ platí

$$min(val(\varphi), val(\neg\varphi)) = 0,$$

protože pro $val\ (\varphi) > 0$ je $val\ (\neg\varphi) = 0$. Proto

$$val\ (\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) \quad = \quad 1.$$

Výrok $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ je tedy 1-tautologie jak v Gödelově, tak i součinové logice. Zákon sporu zde tedy platí.

3.5 Komutativní zákony

$(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$	(komutativnost konjunkce)
$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$	(komutativnost disjunkce)

Podle *(11)* platí $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\psi \wedge \varphi)$, a tedy platí i $(\psi \wedge \varphi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, a proto platí i $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$.

Podle *(13c)* platí $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$, a tedy platí i $(\psi \vee \varphi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$, a proto platí i $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.

Komutativní zákony jsou tedy dokazatelné v *ZL*, a proto platí ve všech logikách nezávisle na výběru *t*-normy.

3.6 Asociativní zákony

$(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$	(asociativita konjunkce)
$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$	(asociativita disjunkce)

Podle 2.4.4 platí pro libovolnou spojitou *t*-normu $val\ (\varphi \wedge \psi) = min\ (val\ (\varphi), val\ (\psi))$. Proto aby platilo $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$, musí platit

$$min\ (x, min\ (y, z)) \quad = \quad min\ (min\ (x, y), z),$$

což platí pro libovolná $x, y, z \in [0, 1]$, protože $min\ (x, min\ (y, z)) = max\ (x, y, z)$ a stejně tak $min\ (min\ (x, y), z) = min\ (x, y, z)$.

Podle 2.4.4 platí pro libovolnou spojitou *t*-normu $val\ (\varphi \vee \psi) = max\ (val\ (\varphi), val\ (\psi))$. Proto aby platilo $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$, musí platit

$$max\ (x, max\ (y, z)) \quad = \quad max\ (max\ (x, y), z),$$

což platí pro libovolná $x, y, z \in [0, 1]$, protože $max\ (x, max\ (y, z)) = max\ (x, y, z)$ a stejně tak $max\ (max\ (x, y), z) = max\ (x, y, z)$.

V *ZL* tedy platí asociativní zákony pro konjunkci i disjunkci.

3.7 Distributivní zákony

$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (distributivnost konjunkce)

$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ (distributivnost disjunkce)

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$ (distributivnost implikace)

Aby platila distributivnost konjunkce, musí podle 2.4.4 platit

$$min\ (x, max\ (y, z)) \quad = \quad max\ (min\ (x, y), min\ (x, z))$$

a to lze rozepsat takto:

$$x \quad = \quad x \qquad \text{pro } x \leq y \text{ nebo } x \leq z,$$
$$max\ (y, z) \quad = \quad max\ (y, z) \qquad \text{pro } x > y \text{ a } x > z.$$

Tento výraz tedy platí pro libovolná $x, y, z \in [0, 1]$. Konjunkce je tedy v *ZL* distributivní.

Obdobně musí pro distributivnost disjunkce podle 2.4.4 platit

$$max\ (x, min\ (y, z)) \quad = \quad min\ (max\ (x, y), max\ (x, z)),$$

a to rozepíšeme takto:

$$x \quad = \quad x \qquad \text{pro } x \geq y \text{ nebo } x \geq y,$$
$$min\ (y, z) \quad = \quad min\ (y, z) \qquad \text{pro } x < y \text{ a } x < z.$$

Tento výraz rovněž platí pro libovolná $x, y, z \in [0, 1]$. Disjunkce je tedy v *ZL* také distributivní.

Distributivnost implikace není v *ZL* dokazatelná, záleží tedy na výběru *t*-normy.

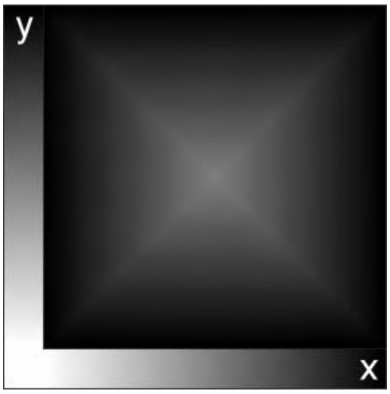
3.7.1 VL (t_L)

Aby platila distributivnost implikace, musí platit

$$i_L\ (x, i_L\ (y, z)) \quad = \quad i_L\ (i_L\ (x, y), i_L\ (x, z)), \qquad \text{takže}$$
$$min(1,1\text{-}x+min(1,1\text{-}y+z)) \quad = \quad min\ (1,1\text{-}min(1,1\text{-}x+y)+min(1,1\text{-}x+z)),$$

což, jak lze snadno zjistit, platí pouze pro $x, y, z \in \{0, 1\}$.

Graficky lze znázornit průběh této formule pro $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$ a $z = val\ (\chi)$ tak, že vykreslíme minimální hodnotu přes z.



Obrázek 3.7.1

Implikace tedy není ve $VL\ (t_L)$ distributivní.

3.7.2 VL (t_G)

V Gödelově logice by pro distributivnost implikace mělo platit

$$
\begin{array}{rcll}
i_G\,(x, i_G\,(y, z)) & = & i_G\,(i_G\,(x, y), i_G\,(x, z)), & \text{takže} \\
i_G\,(y, z) & = & i_G\,(y, z) & \text{pro } x > y \text{ a } x > z, \\
i_G\,(x, z) & = & i_G\,(x, z) & \text{pro } x \le y, \\
1 & = & 1 & \text{pro } x \le z.
\end{array}
$$

Tento výraz je tedy pravdivý pro všechna $x, y, z \in [0, 1]$. V Gödelově logice je tedy implikace distributivní.

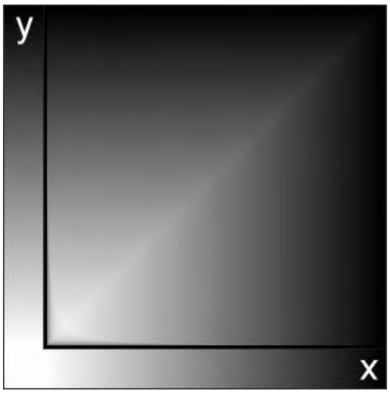
3.7.3 VL (t_Π)

Aby byla implikace distributivní v součinové logice, musí platit

$$
\begin{array}{rcll}
i_\Pi\,(x, i_\Pi\,(y, z)) & = & i_\Pi\,(i_\Pi\,(x, y), i_\Pi\,(x, z)), & \text{z čehož} \\
1 & = & 1 & \text{pro } x \le y \text{ a } x \le z, \\
z / (y \,.\, x) & = & z / y & \text{pro } x > y \text{ a } y > z, \\
1 & = & 1 & \text{pro } x > z \text{ a } z \ge y, \\
i_\Pi\,(y, z) / x & = & z / y & \text{jinak.}
\end{array}
$$

Tento výraz je pravdivý pouze pro $x \le y$ a $x \le z$ nebo $x > z$ a $z \ge y$ nebo $x, y, z \in \{0, 1\}$.

Pokud dosadíme $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$ a $z = val\ (\chi)$ a vykreslíme opět minimální pravdivostní hodnotu přes z, lze průběh pravdivostních hodnot této formule znázornit takto:



Obrázek 3.7.2

V součinové logice tedy implikace není distributivní.

3.8 De Morganovy zákony

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Podle *(9)* platí $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ a pomocí *(18b)* získáme $\neg\varphi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$, obdobně také dostaneme $\neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$. Podle *(16)* tedy platí $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$. Podle *(10)* platí také $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$, a tedy podle *(17)* $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi)$ a tedy podle *(13)* také $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$. Obdobně platí také $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$ a aplikováním *(A6)* tedy dostáváme $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ je tedy dokazatelné.

Platí $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ podle *(13a)* a tedy podle *(18b)* $\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\varphi$ a obdobně $\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg\psi$. Proto tedy $\neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Dále podle *(17)* platí $((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \ \&\ (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow \bar{O}$, takže $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$, takže $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ je v *ZL* dokazatelné.

Ukázali jsme, že de Morganovy zákony platí ve všech logikách.

3.9 Zákon ekvivalence

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$$

Podle *(26)* platí $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$. Aby platil zákon ekvivalence, musí platit také $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ a to platí právě tehdy, když

$$min\ (i\ (x, y), i\ (y, x)) \quad \leq \quad t\ (i\ (x, y), i\ (y, x)),$$

a protože $t\,(x, y) \leq min\,(x, y)$, musí platit

$$min\,(i\,(x, y), i\,(y, x)) \quad = \quad t\,(i\,(x, y), i\,(y, x)),$$

což lze rozepsat takto

$$\begin{array}{rcll} min\,(1, i\,(y, x)) & = & t\,(1, i\,(y, x)) & \text{pro } x \leq y, \\ min\,(i\,(x, y), 1) & = & t\,(i\,(x, y), 1) & \text{pro } x > y, \end{array}$$

a tedy

$$\begin{array}{rcll} i\,(y, x) & = & i\,(y, x) & \text{pro } x \leq y, \\ i\,(x, y) & = & i\,(x, y) & \text{pro } x > y. \end{array}$$

Zákon ekvivalence je tedy dokazatelný v *ZL*, a proto platí ve všech logikách.

3.10 Vyjádření implikace

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Tento způsob vyjádření implikace není v *ZL* dokazatelný. Ověříme proto jeho chování v jednotlivých logikách.

3.10.1 VL (t_L)

Aby $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ byla 1-tautologie, musí platit

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & val\,((\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)), \text{ takže} \\ val\,(\varphi \Rightarrow \psi) & = & val\,(\neg\varphi \vee \psi). \end{array}$$

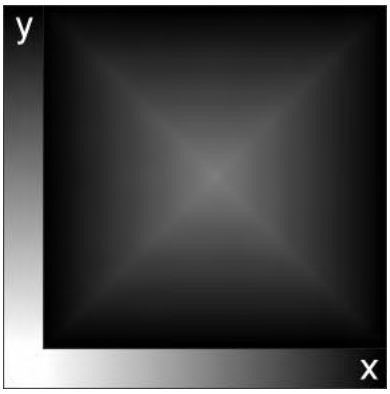
Po dosazení funkčních předpisů a $x = val\,(\varphi)$ a $y = val\,(\psi)$ dostáváme

$$min\,(1, 1 - x + y) \quad = \quad max\,(1 - x, y)$$

a tato rovnost má pouze rohová řešení a to $[x, y] \in \{[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]\}$.

Výraz $(\varphi \Rightarrow\ ) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ tedy není tautologií ve *VL* (t_L).

Graficky průběh pravdivostních hodnot této formule znázorníme takto:



Obrázek 3.10.1

V Łukasiewiczově logice ovšem máme také spojku silné disjunkce. Z definice této spojky platí $(\varphi \vee_S \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$, a proto zřejmě platí $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee_S \psi)$. Tato formule je ve *VL* (t_L) dokazatelná, je tedy 1-tautologií.

V Łukasiewiczově logice lze implikaci vyjádřit pomocí silné disjunkce.

3.10.2 VL (t_G)

Pro platnost formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ v Gödelově logice musí platit

$$val\ (\varphi \Rightarrow \psi) = val\ (\neg\varphi \vee \psi),$$

což při dosazení funkčních předpisů a $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$ dává

$$y = y \quad \text{pro } x > y,$$

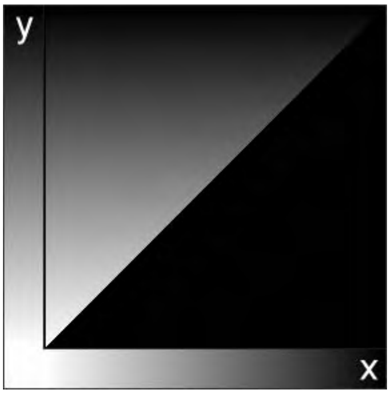
$$1 = y \quad \text{pro } 0 < x < y,$$

$$1 = 1 \quad \text{pro } x = 0.$$

Tato soustava má řešení pouze pro $x = 0$ nebo $y = 1$ nebo $x > y$.

Formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ tedy v Gödelově logice není 1-tautologií.

Grafické znázornění průběhu jejích pravdivostních hodnot je zachyceno na obr. 3.10.2.



Obrázek 3.10.2

V Gödelově logice tedy nelze vyjádřit implikaci disjunkcí.

3.10.3 VL (t_Π)

Pro platnost formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ v součinové logice musí samozřejmě také platit

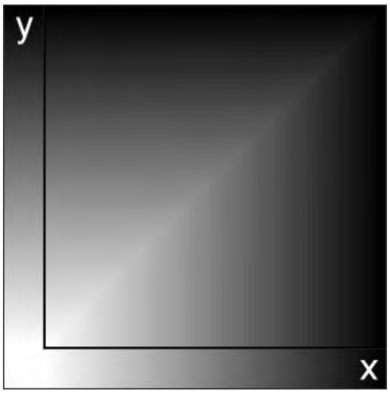
$$val\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad = \quad val\ (\neg\varphi \vee \psi),$$

což při dosazení funkčních předpisů a $x = val\ (\varphi)$ a $y = val\ (\psi)$ dává

$$\begin{array}{rcll} y / x & = & y & \text{pro } x > y, \\ 1 & = & y & \text{pro } 0 < x < y, \\ 1 & = & 1 & \text{pro } x = 0. \end{array}$$

Řešení tedy bude ještě méně než v Gödelově logice. Tato soustava je totiž splněna pouze pro $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ nebo $y = 1$.

Graficky průběh této formule v součinové logice znázorníme takto:



Obrázek 3.10.3

Ani v součinové logice tedy nelze implikaci vyjádřit pomocí disjunkce.

3.11 *Idempotenční zákony*

$(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

Podle lemmatu 2.4.4 platí $val\ (\varphi \wedge \varphi) = min\ (val\ (\varphi), val\ (\varphi)) = val\ (\varphi)$, takže $(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ je 1-tautologie.

Obdobně platí $val\ (\varphi \vee \varphi) = max\ (val\ (\varphi), val\ (\varphi)) = val\ (\varphi)$ a $(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ je tudíž také 1-tautologie.

Idempotenční zákony tedy v *ZL* platí.

3.12 Absorpční zákony

$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow \varphi$

Podle *(9)* platí $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow (\varphi \vee \varphi)$ a v minulém bodě jsme dokázali $(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$. Opačně podle *(13a)* platí $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$. $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \Leftrightarrow \varphi$ je tedy dokazatelné v *ZL*.

Podle 3.8 platí $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \varphi) \vee (\varphi \wedge \psi))$ a podle *(9)* $(\varphi \wedge \varphi) \Rightarrow \varphi$ a $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$. Podle *(16)* tedy $((\varphi \wedge \varphi) \vee (\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \varphi$, takže také $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow \varphi$. Podle *(13a)* platí opačně $\varphi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \varphi) \Rightarrow ((\varphi \wedge \varphi) \vee (\varphi \wedge \psi))$ a tedy $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow \varphi$.

Absorpční zákony jsou dokazatelné v *ZL*.

3.13 Zákon kontrapozice

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

Jako *(18b)* jsme dokázali $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$, opačný vztah $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ ale obecně neplatí. Musel by totiž platit vztah

$$i(i(y, 0), i(x, 0)) \quad \leq \quad i\,(x, y)$$

a tento vztah obecně neplatí. Musíme tedy prozkoumat jeho platnost v závislosti na výběru *t*-normy.

3.13.1 VL (t_L)

Aby platil zákon kontrapozice v Łukasiewiczově logice, musí platit

$$\begin{aligned} i_L\,(1 - y, 1 - x) &\leq i_L\,(x, y) && \text{a tedy} \\ min\,(1, 1\text{-}(1\text{-}y) + 1\text{-}x) &\leq min\,(1, 1 - x + y), && \text{takže} \\ min\,(1, 1 - x + y) &\leq min\,(1, 1 - x + y). \end{aligned}$$

Tento výraz tudíž platí pro libovolná $x, y \in [0, 1]$, zákon kontrapozice tedy v Łukasiewiczově logice platí.

3.13.2 VL (t_G)

V případě zákona kontrapozice by v Gödelově logice muselo platit

$$i_G\,(i_G\,(y, 0), i_G\,(x, 0)) \quad \leq \quad i_G\,(x, y),$$

což lze rozepsat jako

1	$\leq$	1	pro $x = 0$ a $y = 0$
1	$\leq$	1	pro $x = 0$ a $y > 0$
0	$\leq$	0	pro $x > 0$ a $y = 0$
1	$\leq$	$i_G\,(x, y)$	pro $x > 0$ a $y > 0.$

Jak je vidět, tento výraz tedy platí pouze pro $x \leq y$ nebo $y = 0.$

Zákon kontrapozice tedy v Gödelově logice neplatí.

3.13.3 VL (t_Π)

Obdobně by i v součinové logice muselo platit

$$i_\Pi\,(i_\Pi\,(y, 0), i_\Pi\,(x, 0)) \quad \leq \quad i_\Pi\,(x, y),$$

což lze obdobně jako v Gödelově logice rozepsat jako

1	$\leq$	1	pro $x = 0$ a $y = 0$
1	$\leq$	1	pro $x = 0$ a $y > 0$
0	$\leq$	0	pro $x > 0$ a $y = 0$
1	$\leq$	$i_\Pi\,(x, y)$	pro $x > 0$ a $y > 0.$

a tento výraz také platí pouze pro $x \leq y$ nebo $y = 0.$

Zákon kontrapozice tedy neplatí ani v součinové logice.

3.14 Zákon Dunse Scota

$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$

kontradikce je explozivní

Premisou této formule je ve dvouhodnotové logice kontradikce, ve 3.4 jsme však již ukázali, že formule $\varphi \wedge \neg\varphi$ je kontradikcí pouze v Gödelově a součinové logice, zatímco v Łukasiewiczově nikoliv. Ve $VL(t_G)$ a $VL(t_\Pi)$ tedy podle *(A7)* platí $\bar{O} \Rightarrow \psi$.

Zákon Dunse Scota platí jen v Gödelově a součinové logice.

3.15 Zákon o slučování premis

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$

Podle *(A5a)* $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi)$, a proto zjevně v Gödelově logice platí $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$. V *ZL* však tento zákon dokazatelný není.

3.15.1 VL (t_L)

Aby platil zákon o slučování premis musí platit

$$min\,(1,1-x+min(1,1-y+z)) \leq min\,(1,1-min(x,y)+z), \quad \text{takže}$$
$$1-x+min(1,1-y+z) \leq 1-min(x,y)+z,$$

což platí pouze pro $x, y, z \in \{0, 1\}$.

Grafické znázornění průběhu pravdivostních hodnot této formule bude shodné jako na obr. 3.7.1.

Zákon o slučování premis tedy v Łukasiewiczově logice neplatí.

3.15.2 VL (t_Π)

Pro platnost zákona o slučování premis by mělo platit

$$1 \leq 1 \quad \text{pro } x \leq y \text{ a } y \leq z,$$
$$1 \leq 1 \quad \text{pro } y = 0$$
$$min\,(1, z / (x \,.\, y)) \leq min\,(1, z / min\,(x, y)) \quad \text{jinak.}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že platí pouze pro $x, y, z \in \{0, 1\}$.

Grafické znázornění průběhu pravdivostních hodnot této formule bude shodné jako na obr. 3.7.2.

Zákon o slučování premis tedy neplatí ani v součinové logice.

3.16 Zákon o záměně premis

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$ je již dokázán jako *(2)*, platí tedy v *ZL*.

3.17 Hypotetický sylogismus

$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$

tranzitivnost implikace

Z *(A1)* a *(A5)* plyne $((\varphi \Rightarrow \psi)\ \&\ (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$, tedy jasně platí v Gödelově logice, o ostatních logikách ale toto prohlásit nemůžeme.

3.17.1 VL (t_L)

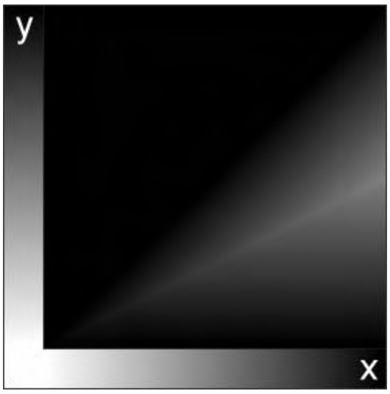
Aby platil hypotetický sylogismus, musí v Łukasiewiczově logice platit

$min(min(1,1\text{-}x+y),min(1,1\text{-}y+z)) \leq \quad min\ (1,1\text{-}x+z),$ z čehož

$min\ (1\text{-}x+y,1\text{-}y+z) \quad \leq \quad min\ (1,1\text{-}x+z),$

což neplatí pro $x > y$ a $y > z$.

Grafické znázornění průběhu pravdivostních hodnot této formule ve *VL* (t_L) pro $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$ a $z = val\ (\chi)$. Opět zobrazujeme minimální hodnotu přes *z*.



Obrázek 3.17.1

Hypotetický sylogismus tedy v Łukasiewiczově logice neplatí a tranzitivnost implikace zde vyjadřujeme raději pomocí *(A1)*.

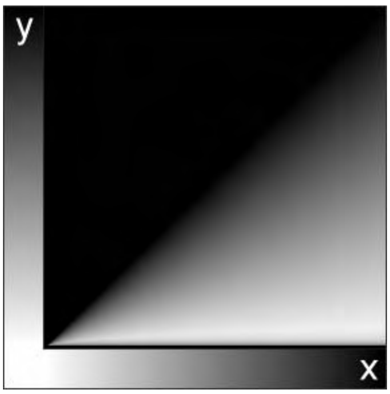
3.17.2 VL (t_Π)

V součinové logice musí pro platnost hypotetického sylogismu platit

$min\ (i_\Pi\ (x,y),\ i_\Pi\ (y,z))$	$\leq$	$i_\Pi\ (x,\ z),$	což lze rozepsat
$min\ (y\ /\ x,\ z\ /\ y)$	$\leq$	$z\ /\ x$	pro $x > y$ a $y > z$
$z\ /\ y$	$\leq$	$z\ /\ x$	pro $x < y$ a $z < x$
atd.			

Tento výraz neplatí pro $x > y$ a $y > z$.

Grafické znázornění průběhu pravdivostních hodnot této formule ve *VL* (t_Π) pro $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$ a $z = val\ (\chi)$. Opět zobrazujeme minimální hodnotu přes z.



Obrázek 3.17.2

Hypotetický sylogismus tedy neplatí ani v součinové logice, proto zde tranzitivnost implikace také vyjadřujeme pomocí *(A1)*.

3.18 Principip „reductio ad absurdum“

$((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$

$((\neg\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \varphi$

důkaz sporem

Podle *(12)* platí $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi))$.

Zákon sporu platí pouze v Gödelově a součinové logice, a proto pouze zde platí $(\psi \wedge \neg\psi) \Leftrightarrow \bar{O}$. V těchto dvou logikách potom dostaneme $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$. Analogicky pro $((\neg\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\neg\varphi$. Protože ale v Gödelově ani v součinové logice neplatí zákon dvojité negace, nelze toto upravit na $((\neg\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \varphi$.

Tento zákon tedy v Gödelově a součinové logice platí pouze v omezené podobě, a to $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$. Pomocí důkazu sporem lze tedy ve $VL\ (t_G)$ a $VL\ (t_\Pi)$ dokázat pouze neplatnost výroku.

V Łukasiewiczově logice zákon sporu neplatí, neplatí proto ani důkaz sporem.

3.19 Důkaz rozborem případů

$((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow \chi$

Z *(16)* $((\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)$ a *(A5a)* plyne $(((\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi))\ \&\ (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow \chi$. V Gödelově logice lze nahradit silnou konjunkci min-konjunkcí, důkaz rozborem případů zde tedy platí.

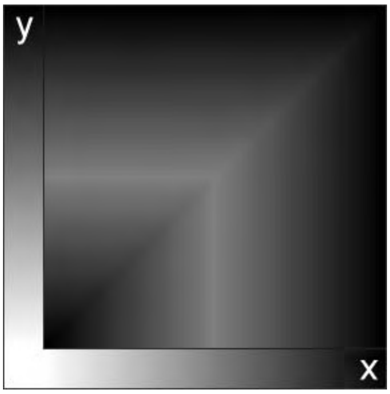
3.19.1 VL (t_L)

Aby platila tato formule v Łukasiewiczově logice, musí platit

$min(1,max(x,y),1-x+z,1-y+z) \quad \leq \quad z,$

a to platí pouze pro $x \leq z$ a $y \leq z$ nebo $x = 1$ nebo $y = 1$.

Grafické znázornění této formule (opět pro $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$, $z = val\ (\chi)$ a zobrazení minimální hodnoty přes z) vypadá v Łukasiewiczově logice takto:



Obrázek 3.19.1

V Łukasiewiczově logice tedy důkaz rozborem případů neplatí.

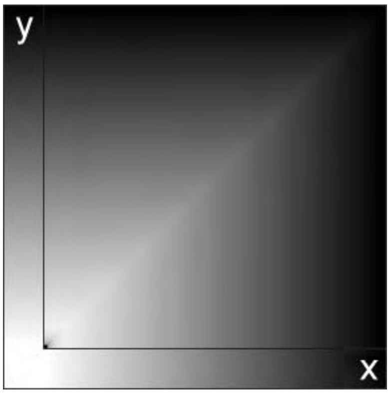
3.19.2 VL (t_Π)

V součinové logice musí pro platnost důkazu rozborem případů platit

$min\ (max(x,y),z/x,\ z/y)$	$\leq$	z	pro $x > z$ a $y > z$,
$min\ (max(x,y),1,z/y)$	$\leq$	z	pro $x \leq z$ a $y > z$,
$min\ (max(x,y),z/x,1)$	$\leq$	z	pro $x > z$ a $y \leq z$,
$min\ (max(x,y),1,1)$	$\leq$	z	pro $x \leq z$ a $y \leq z$.

Tato soustava však platí pouze pro $x \leq z$ a $y \leq z$ nebo $x = 1$ nebo $y = 1$.

Grafické znázornění této formule (opět pro $x = val\ (\varphi)$, $y = val\ (\psi)$, $z = val\ (\chi)$ a zobrazení minimální hodnoty přes z) vypadá v součinové logice takto:



Obrázek 3.19.2

Ani v součinové logice tedy důkaz rozborem případů neplatí.

Závěr

V práci se podařilo ukázat, že řada zákonů dvouhodnotové logiky platí i ve fuzzy logice, a některé dokonce nezávisle na volbě *t*-normy.

Důležitá je zejména platnost pravidla modus ponens, neboť právě to používáme nejčastěji k dedukci a díky němu můžeme definovat pojmy *důkaz* a *dokazatelnost* způsobem, jako jsme zvyklí ve dvouhodnotové logice.

Díky tomu, že platí zákon totožnosti, má vůbec smysl se fuzzy logikou zabývat, bez něj by totiž nemělo smysl přiřazovat výrokům pravdivostní hodnoty.

Další skupinou jsou komutativní, asociativní a distributivní zákony. Tyto zákony ve fuzzy logice pro konjunkci a disjunkci rovněž platí, díky čemuž můžeme provádět úpravy výrokových formulí obdobně jako v klasické logice. De Morganovy zákony, rovněž platné ve všech logikách, umožňují nahrazovat konjunkci disjunkcí a naopak a spolu s idempotenčními a absorpčními zákony potvrzují chování konjunkce a disjunkce, na které jsme zvyklí z dvouhodnotové logiky.

Zákon ekvivalence platí ve fuzzy logice celkem pochopitelně, neboť ekvivalence je definována jako oboustranná implikace. Ve všech logikách platí ještě zákon o záměně premis, který také často používáme při úpravách logických formulí.

Existují ale zákony dvouhodnotové logiky, které v základní logice neplatí, jejich platnost závisí na zvolené *t*-normě. Logiky určené různými *t*-normami mají tudíž obecně různé vlastnosti.

Jednou z důležitých výrokových logik je Łukasiewiczova logika. V této logice narozdíl od jiných platí zákon dvojité negace a díky tomu zde lze definovat další spojku – silnou disjunkci. Tato spojka umožňuje platnost dalších zákonů jako vyjádření implikace pomocí disjunkce a potvrzuje dokonce i zákon vyloučeného třetího, což zní pro fuzzy logiku poměrně nepřirozeně. Kvůli specifické funkci negace ale v Łukasiewiczově logice neplatí zákon sporu a tudíž ani důkaz sporem. Zákon Dunse Scota se v Łukasiewiczově logice rovněž neprokazuje, ne snad proto, že by kontradikce nebyla explozivní, ale proto, že jeho premisa zde není kontradikcí.

Oproti tomu v Gödelově ani v součinové logice neplatí zákon dvojité negace, platí zde však zákon sporu a díky tomu v omezené míře i důkaz sporem. Premisa zákona Dunse Scota je kontradikce a tak platí i tento zákon. V Gödelově a v součinové logice však nelze implikaci nahrazovat disjunkcí a neplatí zde ani zákon vyloučeného třetího, to nás ale ve fuzzy logice příliš nepřekvapuje.

Důležitým rozdílem mezi Gödelovou a součinovou logikou je, že i silná konjunkce v Gödelově logice je idempotentní. Důsledkem této její vlastnosti je, že v Gödelově logice platí zákon o slučování premis a klasický důkaz rozborem případů. V Gödelově logice dále platí také klasická distributivnost a tranzitivnost implikace.

Jak je vidět, každá z výrokových fuzzy logik má poněkud odlišné vlastnosti, a proto v nich různé zákony klasické výrokové logiky platí nebo neplatí. Platnost těchto některých zákonů klasické dvouhodnotové logiky můžeme použít k usuzování a dokazování ve fuzzy logice. Úsudky a důkazy díky nim můžeme provádět způsobem, na jaký jsme zvyklí.

Literatura

1 HÁJEK, P.: *Metamethematics of fuzzy logic*, Kluwer, 1998

2 JIRKŮ, P. – VEJNAROVÁ, J.: *Formální logika*, VŠE, 2000

3 SOCHOR, A.: *Klasická matematická logika*, Karolinum Praha, 2001

4 DUŽÍ, M. – MARKL, J.: *Matematická logika*, Technická universita Ostrava, 2003

Seznam pojmů

disjunkce	logické *nebo*, výroková spojka, označuje se $\vee$, v klasické logice je pravdivá, pokud je pravdivý alespoň jeden z obou výroků. Ve fuzzy logice je definována jako $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$
ekvivalence	výroková spojka, značí se $\Leftrightarrow$, v klasické logice je pravdivá, pokud jsou pravdivé oba výroky. Ve fuzzy logice je definována jako $(\varphi \Rightarrow \psi)\ \&\ (\psi \Rightarrow \varphi)$
implikace	výroková spojka *jestliže ... pak ...*, označuje se $\Rightarrow$, v klasické logice je nepravdivá, pokud je první výrok pravdivý a druhý nikoliv, jinak je pravdivá. Ve fuzzy logice je implikace definována jako residuum *t*-normy.
konjunkce	logické *a*, výroková spojka, značí se $\wedge$, v klasické logice je pravdivá, pokud jsou pravdivé oba výroky. Ve fuzzy logice je konjunkce definována jako $\varphi\ \&\ (\varphi \Rightarrow \psi)$
kontradikce	formule, která je pro každé ohodnocení výrokových proměnných nepravdivá
modus ponens	pravidlo *odloučení*, dedukční pravidlo, říká, že pokud platí φ a $\varphi \Rightarrow \psi$, potom platí také ψ
negace	jednomístná výroková spojka, logický zápor. V klasické logice je pravdivostní hodnota negace opačná k hodnotě výroku. Ve fuzzy logice je definována jako $\varphi \Rightarrow \bar{O}$
silná konjunkce	základní výroková spojka ve fuzzy logice, označuje se &, její pravdivostní funkcí je *t*-norma
tautologie	formule, která je pravdivá pro každé pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných, z nichž je složena. Ve fuzzy logice se pro upřesnění používá označení 1-tautologie
t_G	Gödelova *t*-norma, $t_G\,(x, y) = min\,(x, y)$
t_L	Łukasiewiczova *t*-norma, $t_L\,(x, y) = max\,(0, x + y - 1)$
***t*-norma**	pravdivostní funkce silné konjunkce, z *t*-normy jsou odvozeny pravdivostní funkce všech výrokových spojek ve fuzzy logice. Nejznámější *t*-normy jsou Łukasiewiczova (t_L), Gödelova (t_G) a součinová (t_Π).
t_Π	Součinová *t*-norma, $t_\Pi\,(x, y) = x\,.\,y$
výrok	věta jazyka, které má smysl přiřadit pravdivostní hodnotu
výroková formule	zápis výroku , skládá se z podformulí, výrokových proměnných a výrokových spojek
i_L	residuum Łukasiewiczovy *t*-normy, $i_L\,(x, y) = 1 - x + y$
i_G	residuum Gödelovy *t*-normy, $i_G\,(x, y) = y$
i_Π	residuum součinové *t*-normy, Goguenova implikace, $i_\Pi\,(x, y) = y/x$
residuum t-normy	pravdivostní funkce implikace, $i(x, y) = max\,\{z \in [0,1];\ t(x, z) \le y\}$, pro $x \ge y$ platí $i\,(x, y) = 1$
ohodnocení	$val\,(\varphi)$, ohodnocení výrokových proměnných je zobrazení, které výrokové proměnné přiřazuje její pravdivostní hodnotu.
základní logika	systém axiomů, které platí ve všech výrokových logikách, nezávisle na volbě *t*-normy
silná disjunkce	$\vee_S$, unikátní spojka Łukasiewiczovy logiky, je definována jako $\neg\varphi \Rightarrow \psi$